Clase 1: Asuntos Básicos

Peter Hummelgens

10 de diciembre de 2006

1. Soporte de una función.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto, entonces se obtiene la <u>clausura</u> $\bar{A}$ de A en $\mathbb{R}$ agregando a A todos sus puntos de acumulación (o puntos límites). Así $\bar{A}$ <u>siempre es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$</u>.

Ejemplo 1.

$$\overline{(0;1)} = \overline{(0;1]} = \overline{[0;1)} = [0;1], \quad \overline{(-\infty;1)} = (-\infty;1], \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R},$$

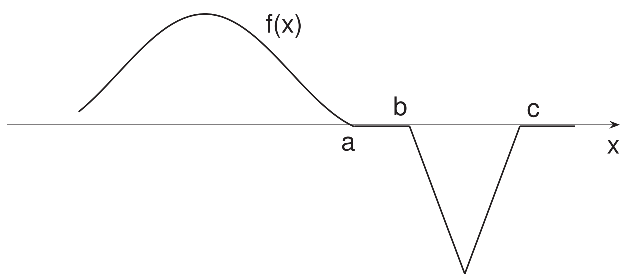
$$\overline{\{-1,0,3\}} = \{-1,0,3\}, \quad \overline{\left\{\frac{1}{n} \mid n = 1,2,3,\cdots\right\}} = \left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\},$$

$$\overline{[-3;1) \cup (2,3)} = [-3;1] \cup [2;3]$$

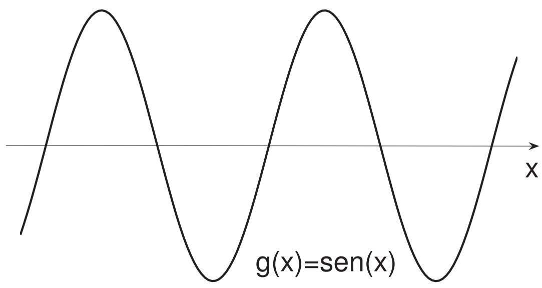
Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua, entonces el soporte de f es por definición

$$sop(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}} \quad \text{(siempre un conjunto cerrado).}$$

Por ejemplo:



$$sop(f) = (-\infty; a] \cup [b; c].$$

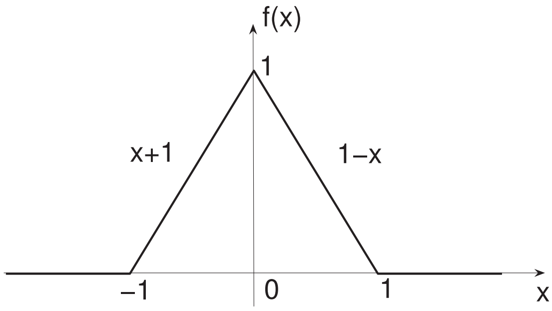


$$sop(g) = \mathbb{R}.$$

Un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ se llama un compacto en $\mathbb{R}$. En las figuras anteriores f y g no son de soporte compacto, pero

$$h(x) = \begin{cases} 0; & x < -1 \\ 1 + x; & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x; & 0 \leq x \leq 1 \\ 0; & x > 1 \end{cases}$$

sí es de soporte compacto, $sop(h) = [-1; 1]$.



Observe

$$f \text{ es de soporte compacto} \iff f(x) = 0 \text{ fuera de algún compacto.}$$

2. Espacios vectoriales de funciones.

Sea V el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ (advertencia: en este curso las funciones pueden tomar valores complejos en general). Para $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ definimos $f + g$, $\lambda f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ (es decir $f + g$, $\lambda f \in V$) por

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x),\ x \in \mathbb{R} \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x),\ x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

(esto es nada nuevo: bachillerato). Con las operaciones (1) V es un espacio vectorial (complejo) cuyos elementos (vectores) son funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Que V es un espacio vectorial significa que podemos aplicar todas las reglas algebraicas usuales, como

$$f + g = g + f,\ f + (g + h) = (f + g) + h := f + g + h \text{ (no hace falta poner paréntesis)},$$

$$\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g,\ \lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f,\ f + 0 = f \text{ (donde 0 es la función } \mathbb{R} \longrightarrow \{0\}),$$

$$f - f = 0, \cdots \text{ etc.}$$

En general trabajaremos con subconjuntos $W \subseteq V$ de funciones con propiedades especiales: continuas, diferenciables, integrables,$\cdots$ etc. Del algebra lineal tenemos un criterio fácil para verificar que $W \subseteq V$ es también un espacio vectorial bajo las mismas operaciones (1):

Para que $W \subseteq V$ sea un espacio vectorial es necesario y suficiente que

$$f, g \in W,\ \lambda \in \mathbb{C} \implies f + g,\ \lambda f \in W. \tag{2}$$

Decimos entonces que W es un subespacio lineal de V.

Ejemplo 2.

(a) $C(\mathbb{R})$: *todas las funciones continuas en* $\mathbb{R}$, $C^k(\mathbb{R})$ $(1 \leq k < \infty)$*: las funciones* k *veces diferenciables con continuidad,* $C^\infty(\mathbb{R})$: *las funciones infinitas veces diferenciables (no hace falta agregar "con continuidad" ya que diferenciable* $\Longrightarrow$ *continua). Tenemos entonces los espacios* $C^k(\mathbb{R})$ $(0 \leq k \leq \infty)$*, donde* $C^0(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R})$*. Es fácil verificar (2) con* $W = C^k(\mathbb{R})$*, de modo que* $C^k(\mathbb{R})$ $(0 \leq k \leq \infty)$ *es un espacio vectorial.*

(b) $C_0^k(\mathbb{R})$ $(0 \leq k \leq \infty)$*: las funciones* $f \in C^k(\mathbb{R})$ *con sop*(f) *compacto. Es fácil verificar (2)con* $W = C_0^k(\mathbb{R})$*, de modo que*

$$C_0^k(\mathbb{R})\ (0 \leq k \leq \infty) \text{ es un espacio vectorial.}$$

Notación (de L. Schwartz): $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$, un espacio fundamental para este curso, llamado el espacio de las funciones de prueba.

Ejemplo 3. *(a) $L^1(\mathbb{R})$: las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que existe $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$. Para verificar que $L^1(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial observamos primero la desigualdad triangular*

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|,$$

luego

$$\begin{aligned} f, g \in L^1(\mathbb{R}) \implies \int\limits_{-\infty}^{\infty} |(f+g)(x)|dx &\overset{(1)}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) + g(x)|dx \\ &\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx \end{aligned}$$

existe ya que existen $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ y $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx \Longrightarrow f+g \in L^1(\mathbb{R})$. Además, con $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |(\lambda f)(x)|dx \overset{(1)}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda f(x)|dx = |\lambda| \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$$

existe $\Longrightarrow \lambda f \in L^1(\mathbb{R})$. Con esto verificamos (2) con $W = L^1(\mathbb{R})$. El espacio $L^1(\mathbb{R})$ se llama el espacio de las funciones absolutamente integrables.

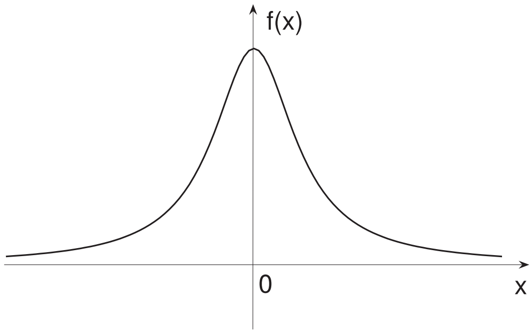
(b) $L^1_{loc}(\mathbb{R})$: Las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que existe $\int\limits_K |f(x)|dx$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$. A este espacio lo llamaremos el espacio de las funciones localmente integrables ("localmente", es decir, sobre todo compacto). Es claro que $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial. Observemos:

$$C_0^k(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}) \ \ (0 \leq k \leq \infty)$$

$$C^k(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}) \ \ (0 \leq k \leq \infty).$$

(c) Veamos algunos ejemplos concretos:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \ -\infty < x < \infty.$$

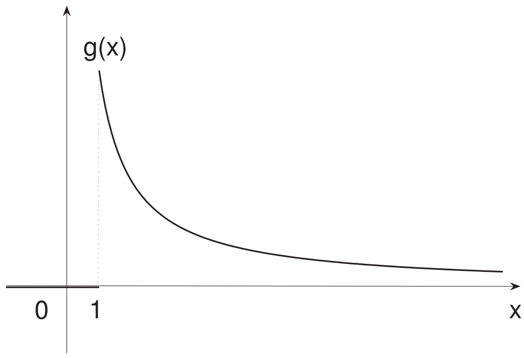


Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = \pi,$$

existe $\Longrightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$.

$$g(x) = \begin{cases} 0; & x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases} .$$

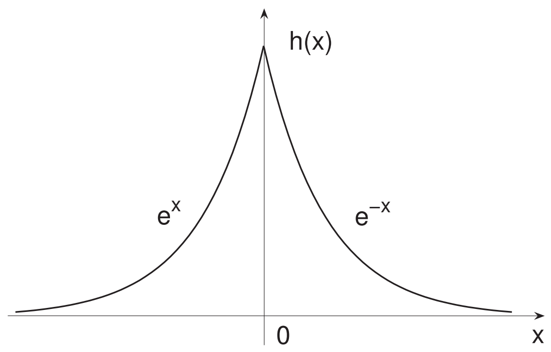


Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{\infty} = \ln\infty = \infty,$$

no existe $\Longrightarrow g \notin L^1(\mathbb{R})$, *pero evidentemente* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Sea $h(x) = e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$.



Verifique que $h \in L^1(\mathbb{R})$.

3. Funcionales lineales.

Sea V un espacio vectorial complejo. Un funcional lineal sobre V es por definición una aplicación lineal $T : V \longrightarrow \mathbb{C}$, es decir

$$\begin{aligned} T(f+g) &= T(f) + T(g) \\ T(\lambda f) &= \lambda T(f) \end{aligned} \tag{3}$$

para todo $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Introducimos la notación de corchete $\langle \ , \ \rangle$:

$$\langle T, f\rangle = T(f).$$

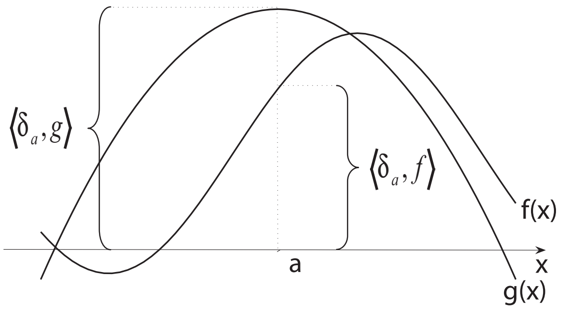
Con esta notación (3) dice que

$$\begin{aligned} \langle T, f+g\rangle &= \langle T, f\rangle + \langle T, g\rangle \\ \langle T, \lambda f\rangle &= \lambda \langle T, f\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

Siguen 2 ejemplos fundamentales:

Ejemplo 4. *Sea* $a \in \mathbb{R}$ *arbitrario fijo. Entonces definimos*

$$\begin{aligned} &\delta_a : C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \textit{por} \\ &\langle \delta_a, f\rangle := f(a), \ f \in C(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{5}$$



Podemos llamar δ_a un <u>*operador de evaluación*</u> *(δ_a* <u>*evalúa*</u> *cualquier $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua en $x = a$). Veamos que δ_a* <u>*es un funcional lineal*</u>*. Para $f, g \in C(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos*

$$\langle \delta_a, f + g\rangle \overset{(5)}{=} (f + g)(a) \overset{(1)}{=} f(a) + g(a) \overset{(5)}{=} \langle \delta_a, f\rangle + \langle \delta_a, g\rangle,$$

$$\langle \delta_a, \lambda f\rangle \overset{(5)}{=} (\lambda f)(a) \overset{(1)}{=} \lambda f(a) \overset{(5)}{=} \lambda\langle \delta_a, f\rangle,$$

y así verificamos (4) con $T = \delta_a$. El funcional lineal δ_a se llama <u>*la delta de Dirac centrada en $x = a$*</u>*. Los físicos hablan de la "función delta", lo que es* <u>*incorrecto*</u>*: δ_a* <u>*no es*</u> *una función sino un* <u>*funcional*</u>*. Escribimos simplemente δ en lugar de δ_0.*

Ejemplo 5. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ fijo. Definimos*

$$\begin{aligned} &T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \textit{por} \\ &\langle T_f, \varphi\rangle := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{6}$$

Como $sop(\varphi) = K$ es compacto, $sop(f\varphi) \subseteq K$ también es compacto (un subconjunto cerrado de un compacto es compacto), es decir $f(x)\varphi(x) = 0$ fuera de algún compacto y por lo tanto la integral en (6) realmente <u>*no*</u> *es una integral impropia sino es una integral sobre un intervalo compacto,* <u>*por lo tanto existe*</u>*, de modo que $\langle T_f, \varphi\rangle$ está bien definido para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Veamos que T_f <u>*es un funcional lineal*</u>*. Para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos*

$$\begin{aligned} \langle T_f, \varphi + \psi\rangle &\underset{(6)}{\overset{(1)}{=}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)[\varphi(x) + \psi(x)]dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(x)dx \\ &\overset{(6)}{=} \langle T_f, \varphi\rangle + \langle T_f, \psi\rangle, \end{aligned}$$

$$\langle T_f, \lambda\varphi\rangle \overset{(1)}{\underset{(6)}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(x)\varphi(x)dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \overset{(6)}{=} \lambda\langle T_f, \varphi\rangle,$$

y así verificamos (4) con $T = T_f$.

4. El concepto "casi siempre".

Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Decimos que f y g son casi siempre iguales ($f(x) = g(x)$ *c.s.* en $\mathbb{R}$) si, y sólo si, $f(x) = g(x)$ en $\mathbb{R}$ excepto posiblemente en un conjunto de medida cero, donde para los fines prácticos podemos entender como conjunto de medida cero un conjunto finito o infinito de puntos discretos (no queremos entrar en sutilezas matemáticas). En este caso seguramente, si $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Resulta que el inverso también es cierto:

Lema 1. *(Du Bois-Reymond) Si $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, entonces*

$$f(x) = g(x) \text{ c.s. en } \mathbb{R} \iff \langle T_f, \varphi\rangle = \langle T_g, \varphi\rangle \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

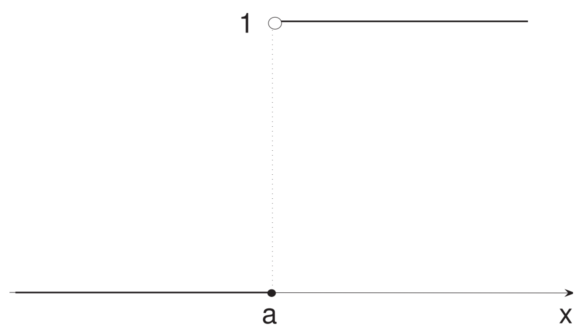
($\Longrightarrow$ es trivial, $\Longleftarrow$ es la afirmación importante). Conclusión: $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definen el mismo funcional lineal $T_f = T_g : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \iff f(x) = g(x)$ c.s. en $\mathbb{R}$. Esta es una de las razones por la cual desde ahora y adelante consideraremos 2 funciones en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ como la misma función cuando son iguales c.s. en $\mathbb{R}$ (son entonces idénticas como funcionales lineales).

Podemos entonces cambiar los valores de una función en un conjunto de medida cero y el resultado será "la misma función". Más aún podemos entonces dejar de definir una función en un conjunto de medida cero.

Ejemplo 6.

$$h_a(x) = \begin{cases} 0; & x \leq a \\ 1; & x > a \end{cases}$$

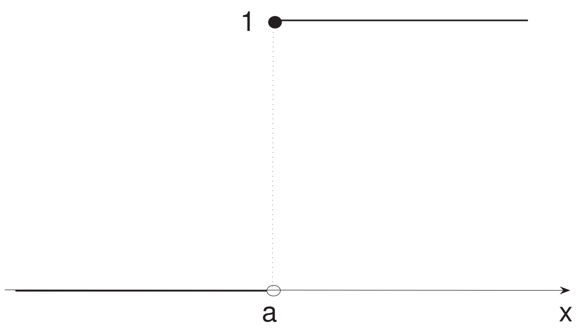
con gráfica



y

$$\widetilde{h}_a(x) = \begin{cases} 0; & x < a \\ 1; & x \geq a \end{cases}$$

con gráfica



definen la misma función en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *ya que*

$$h_a(x) = \widetilde{h}_a(x) \text{ c.s. en } \mathbb{R} \text{ (}\{a\}\text{ es un conjunto de medida cero).}$$

¿Cuál de las 2 definiciones es la más apropiada?. La pregunta es <u>inútil</u>: podemos dejar de definir la función en $x = a$ *y escribir*

$$h_a(x) := \begin{cases} 0; & x < a \\ 1; & x > a \end{cases} ,$$

así evitando discusiones interminables. La función h_a *se llama la <u>función de Heaviside centrada en $x = a$</u>. Escribimos* $h(x) = h_0(x)$.

Clase 2: Distribuciones y Derivadas Generalizadas.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

1. Distribuciones.

Nuestro espacio vectorial básico será $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$, el espacio de las funciones de prueba. Una distribución en $\mathbb{R}$ es por definición un funcional lineal $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ (Observación: más precisamente se requiere que se defina en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ una noción de convergencia de succesiones y que T sea continua con respecto a esta convergencia; sin embargo esta condición de continuidad se cumple "en la práctica", y cómo este no es un curso para matemáticos obviamos la condición de continuidad.)

En la clase 1 vimos dos ejemplos fundamentales de distribuciones:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ (a \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

y (simplificando la notación escribiendo f en lugar de T_f)

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ (f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})). \tag{2}$$

Distribuciones de la forma (2), es decir producidas por una función localmente integrable, las llamamos distribuciones regulares. Una distribución no regular se llama distribución singular. Las distribuciones δ_a son distribuciones singulares (existen otros tipos de distribuciones singulares que están fuera del alcance de este curso).

Sea $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ el conjunto de las distribuciones en $\mathbb{R}$. Vamos a convertir $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en un espacio vectorial introduciendo la suma $S+T$ de dos distribuciones $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y la multiplicación λT por un número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$. Definimos

$$\begin{gathered} \langle S+T, \varphi \rangle := \langle S, \varphi \rangle + \langle T, \varphi \rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \langle \lambda T, \varphi \rangle := \lambda \langle T, \varphi \rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \end{gathered} \tag{3}$$

Es claro que $S+T, \lambda T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$. Verifiquemos que $S+T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, es decir que $S+T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal. Tenemos para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle S+T, \varphi+\psi \rangle &\overset{(3)}{=} \langle S, \varphi+\psi \rangle + \langle T, \varphi+\psi \rangle \\ &= \langle S, \varphi \rangle + \langle S, \psi \rangle + \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \psi \rangle \\ &\overset{(3)}{=} \langle S+T, \varphi \rangle + \langle S+T, \psi \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle S+T, \mu\varphi \rangle &\overset{(3)}{=} \langle S, \mu\varphi \rangle + \langle T, \mu\varphi \rangle \\ &= \mu\langle S, \varphi \rangle + \mu\langle T, \varphi \rangle \\ &= \mu \left[\langle S, \varphi \rangle + \langle T, \varphi \rangle \right] \\ &\overset{(3)}{=} \mu\langle S+T, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

y así verificamos que $S+T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Dejamos al lector verificar que $\lambda T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ahora $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial y podemos aplicar las reglas algebraicas usuales de un espacio vectorial.

Podemos también definir la multiplicación ϕT de una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ con una función $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (no necesariamente de soporte compacto.) Definimos

$$\langle \phi T, \varphi \rangle := \langle T, \phi\varphi \rangle, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{4}$$

El corchete $\langle T, \phi\varphi \rangle$ está bien definido ya que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) \Longrightarrow \phi\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (¡verifique!). Es claro que $\phi T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$. Además para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \langle \phi T, \varphi+\psi \rangle &\overset{(4)}{=} \langle T, \phi(\varphi+\psi) \rangle \\ &= \langle T, \phi\varphi + \phi\psi \rangle \\ &= \langle T, \phi\varphi \rangle + \langle T, \phi\psi \rangle \\ &\overset{(4)}{=} \langle \phi T, \varphi \rangle + \langle \phi T, \psi \rangle, \end{aligned}$$

y
$$\langle \phi T, \lambda\varphi \rangle \overset{(4)}{=} \langle T, \lambda\phi\varphi \rangle = \lambda\langle T, \phi\varphi \rangle \overset{(4)}{=} \lambda\langle \phi T, \varphi \rangle,$$

$\Longrightarrow \phi T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ es funcional lineal, es decir, $\phi T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ejemplos concretos presentaremos más adelante.

2. Derivadas generalizadas (o distribucionales).

Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ una función dada. Como $f' \in C(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$, f' define la distribución regular

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{\infty}^{-\infty} f'(x)\varphi(x)dx, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{5}$$

Aplicando integración por partes en la integral tenemos

$$\langle f', \varphi \rangle = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\infty}^{-\infty} f(x)\varphi'(x)dx,$$

pero $[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} = 0$ porque φ es de soporte compacto (por lo tanto $f(x)\varphi(x) = 0$ fuera de algún compacto), de modo que

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ (f \in C^1(\mathbb{R})) \tag{6}$$

(es permitido escribir $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$) como corchete $\langle f, \varphi' \rangle$ porque $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ cuando $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$). La <u>observación clave</u> ahora es:

el miembro derecho $-\langle f, \varphi' \rangle$ de (6) está bien definido para <u>cualquier</u> $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, diferenciable <u>o no</u>.

Es ahora natural la definición siguiente. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definimos <u>su derivada generalizada</u> como la <u>distribución</u> $f'_{gen} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\langle f'_{gen}, \varphi \rangle := -\langle f, \varphi' \rangle, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{7}$$

Veamos que f'_{gen} es una distribución. Para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos

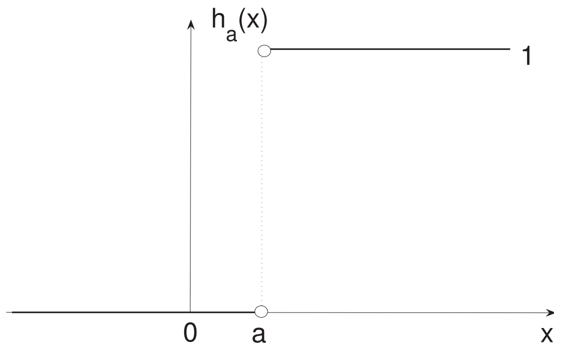
$$\begin{aligned} \langle f'_{gen}, \varphi + \psi \rangle &\overset{(7)}{=} -\langle f, \varphi' + \psi' \rangle \\ &= -\langle f, \varphi' \rangle - \langle f, \psi' \rangle \\ &\overset{(7)}{=} \langle f'_{gen}, \varphi \rangle + \langle f'_{gen}, \psi \rangle, \end{aligned}$$

$$\langle f'_{gen}, \lambda\varphi \rangle \overset{(7)}{=} -\langle f, \lambda\varphi' \rangle = -\lambda\langle f, \varphi' \rangle \overset{(7)}{=} \lambda\langle f'_{gen}, \varphi \rangle,$$

de modo que $f'_{gen} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal, es decir $f'_{gen} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Destacamos: f'_{gen} es una <u>distribución</u> y <u>no</u> una función. Sin embargo, cuando $f \in C^1(\mathbb{R})$ entonces f también posee su <u>derivada clásica</u> $f'_{cl}(x) = f'(x)$ (la cual es una función continua), y según (6), (7) tenemos entonces $f' = f'_{gen}$ como distribuciones. Está afirmación confirma que el concepto de la derivada generalizada (DG) es una generalización apropiada de la derivada clásica (de Newton y Leibniz): cuando ambos existen, entonces coinciden (como distribuciones).

Ejemplo 1. *Sea la función de Heaviside h_a con gráfica*



Es claro que $h_a \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, por lo tanto h_a define la distribución regular

$$\langle h_a, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(x)\varphi(x)dx = \int_{a}^{\infty} \varphi(x)dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{8}$$

La derivada clásica $(h_a)'_{cl}(x)$ existe c.s. en $\mathbb{R}$ (excepto en $x = a$) y $(h_a)'_{cl}(x) = 0$ c.s. en $\mathbb{R}$, es decir $(h_a)'_{cl} = 0$. Pero veamos ahora $(h_a)'_{gen}$. Tenemos para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle (h_a)'_{gen}, \varphi\rangle &\overset{(7)}{=} -\langle h_a, \varphi'\rangle \overset{(8)}{=} -\int_{a}^{\infty} \varphi'(x)dx \\ &= -[\varphi(\infty) - \varphi(a)] = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi\rangle\end{aligned}$$

($\varphi(\infty) = 0$ porque $sop(\varphi)$ es compacto). Vemos entonces que

$$(h_a)'_{gen} = \delta_a. \tag{9}$$

Tenemos aquí el primer ejemplo donde la DG de una distribución regular es una distribución singular.

Podemos generalizar (7) para definir la derivada distribucional T' de una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ arbitraria por

$$\langle T', \varphi\rangle := -\langle T, \varphi'\rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{10}$$

Es un ejercicio fácil verificar que $T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Podemos entonces proceder a la segunda derivada distribucional:

$$\langle T'', \varphi\rangle = \langle (T')', \varphi\rangle \overset{(10)}{=} -\langle T', \varphi'\rangle \overset{(10)}{=} \langle T, \varphi''\rangle, \cdots, \text{etc},$$

y más general

$$\langle T^{(n)}, \varphi\rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)}\rangle;\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{11}$$

Por ejemplo, para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$,

$$\langle f^{(n)}_{gen}, \varphi\rangle \overset{(11)}{=} (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)}\rangle = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi^{(n)}(x)dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{12}$$

$$\langle \delta^{(n)}_a, \varphi\rangle \overset{(11)}{=} (-1)^n \langle \delta_a, \varphi^{(n)}\rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(a),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{13}$$

Según (11) <u>cualquier</u> $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tiene derivadas distribucionales (DD) de <u>cualquier</u> orden.

3. Observaciones.

Es frecuentemente natural indicar explícitamente la variable x en la escritura de distribuciones, por ejemplo $\delta_a(x)$, $\delta'_a(x)$, $T(x)$ (con $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$), etc. Por ejemplo el producto de la función $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ con δ_a se escribe "mejor" como $x\delta_a(x)$ en lugar de $x\delta_a$, etc. Sin embargo la notación $\delta_a(x)$ sugiere que δ_a es una función y sabemos que <u>no es así</u>, es decir hay que interpretar la notación de la manera correcta.

Una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tiene <u>2 aspectos</u>. De una parte es una <u>función</u> y de otra parte define una <u>distribución</u> regular T_f (en la notación de la Clase 1). Hemos dicho en la Clase 1 que identificamos (consideramos como la misma función) dos funciones $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $f(x) = g(x)$ $c.s.$ en $\mathbb{R}$, y en este caso escribimos $f = g$. Según el Lema de Du Bois - Reymond (Clase 1) tenemos,

$$T_f = T_g \iff f = g \ \text{(es decir } f(x) = g(x)\ c.s. \text{ en } \mathbb{R}).$$

Esto significa que tenemos una correspondencia $1-1$ (una <u>biyección</u>) entre las funciones localmente integrables y las distribuciones regulares, y con esta correspondencia podemos considerar $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ como un <u>subespacio lineal</u> de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, escribiendo

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

En lo que sigue, cuando decimos que una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ " es una función", entendemos que esto quiere decir que $T = T_f$ para algún $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Existe una regla del producto (regla de Leibniz):

$$(\phi T)' = \phi' T + \phi T;\ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}). \tag{14}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\langle (\phi T)', \varphi \rangle &\overset{(10)}{=} -\langle \phi T, \varphi' \rangle \overset{(4)}{=} -\langle T, \phi\varphi' \rangle \\
&= -\langle T, (\phi\varphi)' - \phi'\varphi \rangle = \langle T, \phi'\varphi \rangle - \langle T, (\phi\varphi)' \rangle \overset{(4)}{=} \langle \phi' T, \varphi \rangle - \langle T, (\phi\varphi)' \rangle \\
&\overset{(10)}{=} \langle \phi' T, \varphi \rangle + \langle T', \phi\varphi \rangle \overset{(4)}{=} \langle \phi' T, \varphi \rangle + \langle \phi T', \varphi \rangle \\
&\overset{(3)}{=} \langle \phi' T + \phi T', \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, lo que demuestra (14).

4. Ejemplos finales de esta clase.

(a) $x\delta(x) = ?$. Tenemos para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle x\delta(x), \varphi(x) \rangle \overset{(4)}{=} \langle \delta(x), x\varphi(x) \rangle \overset{(1)}{=} 0\varphi(0) = 0 = \langle 0, \varphi(x) \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\Longrightarrow x\delta(x) = 0. \tag{15}$$

¡Sorpresa sorpresa!. Además

$$\begin{aligned}
\langle x\delta'(x), \varphi(x) \rangle &\overset{(4)}{=} \langle \delta'(x), x\varphi(x) \rangle \overset{(10)}{=} -\langle \delta(x), (x\varphi(x))' \rangle \\
&= -\langle \delta(x), \varphi(x) + x\varphi'(x) \rangle \overset{(1)}{=} -\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle - 0\varphi'(0) \\
&= -\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \overset{(3)}{=} \langle -\delta(x), \varphi(x) \rangle, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow x\delta'(x) = -\delta(x). \tag{16}$$

¡Caracoles!. Dejamos como ejercicio y disfrute del lector demostrar las reglas

$$x\delta^{(k)}(x) = -k\delta^{(k-1)}(x);\ k = 1, 2, 3 \cdots,$$

utilizando (14), (15) e inducción $k \longrightarrow k+1$.

(b)

$$\begin{aligned}
\langle e^{ax}\delta_b'(x), \varphi(x)\rangle &\overset{(4)}{=} \langle \delta_b'(x), e^{ax}\varphi(x)\rangle \overset{(10)}{=} -\langle \delta_b(x), (e^{ax}\varphi(x))'\rangle \\
&= -\langle \delta_b(x), ae^{ax}\varphi(x) + e^{ax}\varphi'(x)\rangle \overset{(1)}{=} -ae^{ab}\varphi(b) - e^{ab}\varphi'(b) \\
&\overset{(13)}{=} -\langle ae^{ab}\delta_b, \varphi\rangle + \langle e^{ab}\delta_b', \varphi\rangle \overset{(3)}{=} \langle -ae^{ab}\delta_b + e^{ab}\delta_b', \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

para <u>todo</u> $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\Longrightarrow e^{ax}\delta_b'(x) = e^{ab}[-a\delta_b(x) + \delta_b'(x)].$$

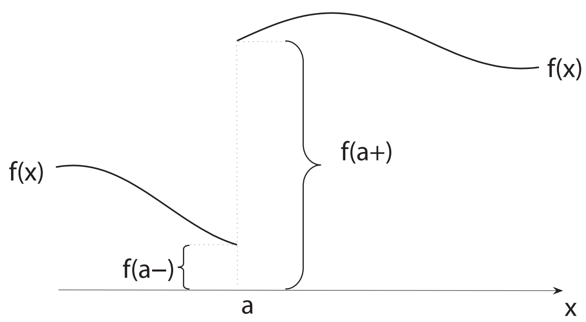
Clase 3: Continuación.

Peter Hummelgens

10 de diciembre de 2006

1. Derivadas generalizadas de funciones suaves a trozos.

Sea f definida en $\mathbb{R}$ ($c.s.$), de clase C^1 en $(-\infty; a]$ y $[a; \infty)$



$$\sigma_0(a) := f(a+) - f(a-) = \text{salto de } f \text{ en } x = a.$$

Tenemos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $f'_{cl}(x)$ existe $c.s.$ en $\mathbb{R}$ (excepto posiblemente en $x = a$) y $f'_{cl} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ define una distribución regular

$$\langle f'_{cl}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'_{cl}(x)\varphi(x)dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\langle f'_{gen}, \varphi\rangle &= -\langle f, \varphi'\rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)dx - \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \text{(integración por partes)} \\
&= -[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{a} + \int\limits_{a}^{\infty} f'_{cl}(x)\varphi(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{a} f'_{cl}(x)\varphi(x)dx - [f(x)\varphi(x)]_{a}^{\infty} \\
&= -f(a-)\varphi(a) + f(a+)\varphi(a) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'_{cl}(x)\varphi(x)dx \\
&= \sigma_0(a)\varphi(a) + \langle f'_{cl}, \varphi\rangle = \langle \sigma_0(a)\delta_a, \varphi\rangle + \langle f'_{cl}, \varphi\rangle = \langle f'_{cl} + \sigma_0(a)\delta_a, \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

para <u>todo</u> $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\Longrightarrow f'_{gen}(x) = f'_{cl}(x) + \sigma_0(a)\delta_a(x). \tag{1}$$

Si f es de clase C^2 en $(-\infty; a]$ y $[a; \infty)$, podemos aplicar (1) a f'_{cl} en lugar de f, es decir

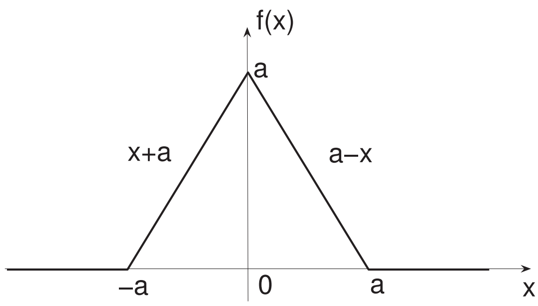
$$(f'_{cl})'_{gen}(x) = f''_{cl}(x) + \sigma_1(a)\delta_a(x),$$

con $\sigma_1(a) = f'_{cl}(a+) - f'_{cl}(a-)$, y luego (1) da

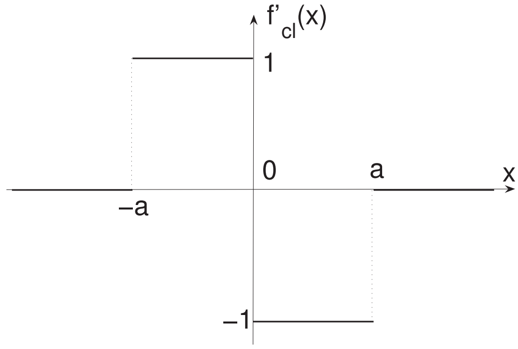
$$f''_{gen} = f''_{cl}(x) + \sigma_1(a)\delta_a(x) + \sigma_0(a)\delta'_a(x), \quad \cdots, \ etc.$$

Si hay varios puntos de salto en $x = a_1, \cdots, x = a_n$, entonces cada salto contribuye con un término con $\delta_{a_i}(x)$, $\delta'_{a_i}(x), \cdots$ en las derivadas generalizadas sucesivas.

Ejemplo 1.



$f(x)$ no tiene saltos $\Longrightarrow$ $f'_{gen}(x) = f'_{cl}(x)$ *c.s. en* $\mathbb{R}$.



Hay tres saltos $\sigma_1(-a) = 1$, $\sigma_1(0) = -2$, $\sigma_1(a) = 1$, *así*

$$f''_{gen}(x) = f''_{cl}(x) + \delta_{-a}(x) - 2\delta(x) + \delta_a(x),$$

pero $f''_{cl}(x) = 0$ *c.s. en* $\mathbb{R}$, *entonces*

$$f''_{gen}(x) = \delta_{-a}(x) - 2\delta(x) + \delta_a(x),$$

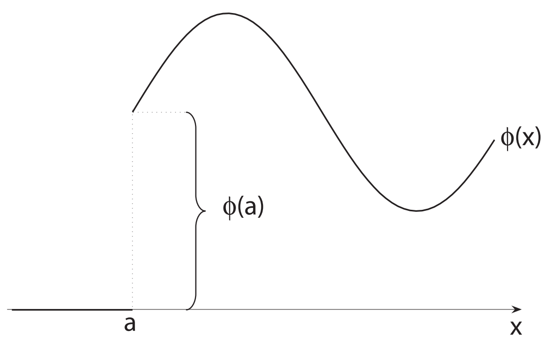
luego

$$f'''_{gen}(x) = \delta'_{-a}(x) - 2\delta'(x) + \delta'_a(x), \cdots, etc.$$

La ecuación para $f'''_{gen}(x)$ *significa que para todo* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *se tiene*

$$\langle f'''_{gen}, \varphi \rangle = \langle \delta'_{-a}, \varphi \rangle - 2\langle \delta', \varphi \rangle + \langle \delta'_a, \varphi \rangle = -\varphi'(-a) + 2\varphi'(0) - \varphi'(a).$$

Ejemplo 2. *Sea* $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *y* $f(x) = h_a(x)\phi(x)$.



Entonces

$$f'_{gen}(x) = f'_{cl}(x) + \phi(a)\delta_a(x),$$

pero $f'_{cl}(x) = h_a(x)\phi'(x)$ *c.s. en* $\mathbb{R}$, *de modo que*

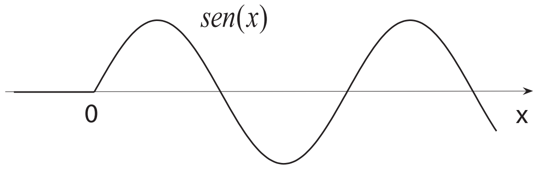
$$f'_{gen}(x) = h_a(x)\phi'(x) + \phi(a)\delta_a(x).$$

Luego

$$f''_{gen}(x) = h_a(x)\phi''(x) + \phi'(a)\delta_a(x) + \phi(a)\delta'_a(x),$$

$$f'''_{gen}(x) = h_a(x)\phi'''(x) + \phi''(a)\delta_a(x) + \phi'(a)\delta'_a(x) + \phi(a)\delta''_a(x), \cdots, etc.$$

Por ejemplo con $f(x) = h(x)\,\mathrm{sen}(x)$



tenemos

$$f'_{gen}(x) = h(x)\cos(x), \quad f''_{gen}(x) = -h(x)\,\mathrm{sen}(x) + \delta(x),$$

$$f'''_{gen}(x) = -h(x)\cos(x) + \delta'(x).$$

Observe que f *satisface la E.D (ecuación diferencial)* $f''_{gen}(x) + f(x) = \delta(x)$.

2. Ecuaciones diferenciales en sentido distribucional.

Sea un operador diferencial lineal (ODL)

$$L = a_0(x) + a_1(x)\frac{d}{dx} + \cdots + a_n(x)\frac{d^n}{dx^n},\ x \in \mathbb{R},$$

con coeficientes C^∞ $a_0, a_1, \cdots, a_n \in C^\infty(\mathbb{R})$. Considerando las derivadas en sentido distribucional y recordando la definición de la multiplicación ϕT de una $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ con una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (de modo que

$$\langle a_k T^{(k)}, \varphi(x)\rangle = \langle T^k(x), a_k(x)\varphi(x)\rangle = (-1)^k \langle T(x), (a_k(x)\varphi(x))^{(k)}\rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})),$$

podemos considerar L como un operador diferencial lineal

$$L : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \; (T \longrightarrow LT),$$

donde

$$LT(x) = a_0(x)T(x) + a_1(x)T'(x) + \cdots + a_n(x)T^{(n)}(x).$$

Podemos considerar ED en sentido distribucional

$$\begin{aligned} Lu(x) = f(x),\; f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ dada,} \\ \text{buscando soluciones } u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{2}$$

Mencionemos sin demostración el resultado siguiente:

Si L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes (ODLCC), entonces la ED homogénea $Lv(x) = 0$ tiene en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ únicamente las soluciones clásicas $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ (es decir: las soluciones distribucionales son la soluciones clásicas). (3)

Las soluciones de $Lv(x) = 0$ se obtienen con los métodos usuales (Mat. IV), y la solución general de $Lu(x) = f(x)$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es entonces $u(x) = u_p(x) + v(x)$, donde $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ la solución general de la ED homogénea y $u_p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es una solución particular de $Lu(x) = f(x)$.

Introducimos ahora un concepto supremamente importante (su importancia veremos en el capítulo sobre convolución). Si L es un ODL, entonces una solución fundamental (s.f.) de L es por definición una distribución $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que

$$LE(x) = \delta(x),\; x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Dada una $s.f.$ E, la $s.f.$ general es $\xi(x) = E(x) + v(x)$, donde v es la solución general de la ED homogénea $Lv(x) = 0$. Mencionamos el resultado siguiente:

Si L es un ODLCC, entonces existe una $s.f.$ E de L de la forma

$$E(x) = h(x)\phi(x), \tag{5}$$

para cierta $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (y esta es única).

Ejemplo 3. *Sea* $L = \dfrac{d^2}{dx^2} + k^2$ *($k > 0$ una constante). Buscamos una s.f. de L de la forma*

$$E(x) = h(x)\phi(x),\; \phi \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Tenemos

$$E'_{gen}(x) = h(x)\phi'(x) + \phi(0)\delta(x), \quad E''_{gen}(x) = h(x)\phi''(x) + \phi'(0)\delta(x) + \phi(0)\delta'(x)$$

$$\begin{aligned} &\overset{(4)}{\Longrightarrow} \quad h(x)\phi''(x) + \phi'(0)\delta(x) + \phi(0)\delta'(x) + k^2h(x)\phi(x) = \delta(x) \\ &\Longrightarrow \quad h(x)[\phi''(x) + k^2\phi(x)] + \phi'(0)\delta(x) + \phi(0)\delta'(x) = \delta(x), \end{aligned}$$

con lo cual podemos cumplir poniendo

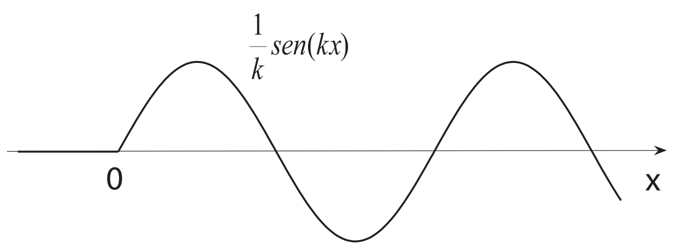
$$\begin{aligned} \phi''(x) + k^2\phi(x) &= 0 \\ \phi(0) = 0, \quad \phi'(0) &= 1 \end{aligned}$$

La ED tiene solución general $\phi(x) = A\cos(xk) + B\,\mathrm{sen}(kx)$ *(saber esto debe ser parte del patrimonio cultural del estudiante). Entonces*

$$\phi(0) = A, \quad \phi(0) = 0 \Longrightarrow \quad A = 0,$$

y entonces

$$\begin{aligned} \phi(x) = B\,\mathrm{sen}(kx) \quad &\Longrightarrow \quad \phi'(x) = kB\cos(kx) \\ &\Longrightarrow \quad \phi'(0) = kB, \quad \phi'(0) = 1 \\ &\Longrightarrow \quad kB = 1 \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{1}{k} \\ &\Longrightarrow \quad E(x) = \frac{1}{k}h(x)\,\mathrm{sen}(kx). \end{aligned}$$



Verifiquemos que esta $E(x)$ realmente es s.f. de L :

$$E'_{gen}(x) = h(x)\cos(kx), \quad E''_{gen}(x) = -kh(x)\operatorname{sen}(kx) + \delta(x)$$

$$\Longrightarrow \quad E''_{gen}(x) + k^2E(x) = -kh(x)\operatorname{sen}(kx) + \delta(x) + kh(x)\operatorname{sen}(kx) = \delta(x),$$

como debe ser.

La s.f. general de L es

$$\xi(x) = \frac{1}{k}h(x)\operatorname{sen}(kx) + A\cos(kx) + B\operatorname{sen}(kx); \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo 4. *Sea $L = -\dfrac{d^2}{dx^2} + k^2$ ($k > 0$ una constante). Ponemos $E(x) = h(x)\phi(x)$ como antes, entonces*

$$E'_{gen}(x) = h(x)\phi'(x) + \phi(0)\delta(x), \quad E''_{gen}(x) = h(x)\phi''(x) + \phi'(0)\delta(x) + \phi(0)\delta'(x),$$

$$-E''_{gen}(x) + k^2E(x) = \delta(x)$$

$$\Longrightarrow \quad -h(x)\phi''(x) - \phi'(0)\delta(x) - \phi(0)\delta'(x) + k^2h(x)\phi(x) = \delta(x)$$

$$\Longrightarrow \quad h(x)[-\phi''(x) + k^2\phi(x)] - \phi'(0)\delta(x) - \phi(0)\delta'(x) = \delta(x),$$

con lo cual podemos cumplir poniendo

$$\phi''(x) - k^2\phi(x) = 0$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = -1.$$

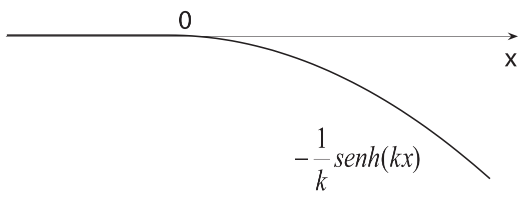
La ED tiene solución general (patrimonio cultural)

$$\phi(x) = A\cosh(kx) + B\operatorname{senh}(kx) \quad \Longrightarrow \quad \phi(0) = A = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \phi(x) = B\operatorname{senh}(kx) \quad \Longrightarrow \quad \phi'(x) = kB\cosh(kx)$$

$$\phi'(0) = kB = -1 \quad \Longrightarrow \quad B = -\frac{1}{k}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi(x) = -\frac{1}{k}\operatorname{senh}(kx) \quad \Longrightarrow \quad E(x) = -\frac{1}{k}h(x)\operatorname{senh}(kx)$$



Verificación:

$$E'_{gen}(x) = -h(x)\cosh(kx), \quad E''_{gen}(x) = -kh(x)\operatorname{senh}(kx) - \delta(x)$$

$$\Longrightarrow \quad -E''_{gen}(x) + k^2 E(x) = kh(x)\operatorname{senh}(kx) + \delta(x) - kh(x)\operatorname{senh}(kx) = \delta(x),$$

correcto.

La s.f. general de L es

$$\xi(x) = -\frac{1}{k}\operatorname{senh}(kx) + A\cosh(kx) + B\operatorname{senh}(kx.)$$

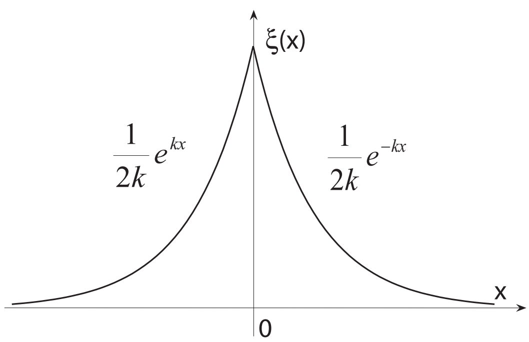
Tomamos $A = B = \dfrac{1}{2k}$, *entonces*

$$x < 0 \ : \ \xi(x) = \frac{1}{2k}\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} + \frac{1}{2k}\frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \frac{1}{2k}e^{kx}$$

$$x > 0 \ : \ \xi(x) = -\frac{1}{k}\frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} + \frac{1}{2k}e^{kx} = \frac{1}{2k}e^{-kx}$$

$$\Longrightarrow \quad \xi = \begin{cases} \frac{1}{2k}e^{kx}; x < 0 \\ \frac{1}{2k}e^{-kx}; x > 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \xi(x) = \frac{1}{2k}e^{-k|x|} \ \ s.f. \ de \ -\frac{d^2}{dx^2} + k^2.$$



Clase 4: Continuación

Peter Hummelgens

10 de diciembre de 2006

Ejemplo 1. *Sea la ED*

$$xu''(x) + (x+3)u'(x) + u(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

una ED con coeficientes <u>*variables*</u>*. Como el coeficiente de $u''(x)$ tiene un cero ($x=0$) existen ahora soluciones* <u>*no*</u> *clásicas. Se pide verificar que $v(x) = \delta(x) + \delta'(x)$ es una solución de la ED. Recordando las relaciones $x\delta^{(k)}(x) = -k\delta^{(k-1)}(x)$ ($k = 1, 2, \cdots$) ya visto, tenemos*

$$xv''(x) = x\delta''(x) + x\delta'''(x) = -2\delta'(x) - 3\delta''(x),$$

$$\begin{aligned}(x+3)v'(x) &= x\delta'(x) + x\delta''(x) + 3\delta'(x) + 3\delta''(x)\\ &= -\delta(x) - 2\delta'(x) + 3\delta'(x) + 3\delta''(x)\\ &= -\delta(x) + \delta'(x) + 3\delta''(x)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad xv''(x)+(x+3)v'(x)+v(x) = -2\delta'(x)-3\delta''(x)-\delta(x)+\delta'(x)+3\delta''(x)+\delta(x)+\delta'(x) = 0,$$

listo.

Ejemplo 2. *Sea el ODL con coeficientes variables $L = x^3\dfrac{d}{dx} + 2$. Se pide verificar que*

$$E(x) = \frac{1}{2}\delta(x) \quad \textit{es s.f. de } L.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}x^3E'_{gen}(x) &= x^3\frac{1}{2}\delta'(x)\\ &= \frac{1}{2}x^2(x\delta'(x))\\ &= \frac{1}{2}x^2(-\delta(x))\\ &= -\frac{1}{2}x(x\delta(x))\\ &= 0,\end{aligned}$$

porque $x\delta(x) = 0$ *(ya visto).*

$$\Longrightarrow \quad LE(x) = x^3 E'_{gen}(x) + 2E(x) = 0 + 2\frac{1}{2}\delta(x) = \delta(x),$$

listo.

1. Límites en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Sea $\{T_n\}$ una sucesión de distribuciones $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Entonces decimos que la sucesión $\{T_n\}$ converge a T en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$T_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} T \;\; si \;\; n \to \infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle, \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{1}$$

Observe que los $\langle T_n, \varphi\rangle$ forman una sucesión de <u>números</u> complejos para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ fijo y (1) dice que $T_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} T$ si, y sólo si, está sucesión de números converge al <u>número</u> $\langle T, \varphi\rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Recíprocamente se puede demostrar que si $\{T_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que existe

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, entonces $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$\langle T, \varphi\rangle := \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle, \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

define una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Esta propiedad se expresa diciendo que $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es <u>completo</u>.

Sea $T_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} T$, entonces para $k = 0, 1, 2, \cdots$,

$$\langle T_n^{(k)}, \varphi\rangle = (-1)^k \langle T_n, \varphi^{(k)}\rangle \;\; \longrightarrow \;\; (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)}\rangle = \langle T^{(k)}, \varphi\rangle, \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

es decir comprobamos que

$$T_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} T \;\; \Longrightarrow \;\; T_n^{(k)} \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} T^{(k)}; \;\; k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

lo que se expresa diciendo que <u>la derivada distribucional es continua en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$</u>.

La convergencia de una serie infinita en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se define como la convergencia de la sucesión de las sumas parciales, es decir,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T \;\; \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \;\; \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \;\; \sum_{n=1}^{N} T_n \overset{\mathcal{D}'(R)}{\longrightarrow} T \;\; \text{si} \;\; N \to \infty \\ \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \;\; &\sum_{n=1}^{N} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle \sum_{n=1}^{N} T_n, \varphi\rangle \;\; \longrightarrow \;\; \langle T, \varphi\rangle \;\; \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ si } N \to \infty \end{aligned} \tag{3}$$

y como $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es completo, cuando $\sum_{n=1}^{\infty}\langle T_n,\varphi\rangle$ converge para todo $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, entonces

$$\langle T,\varphi\rangle := \sum_{n=1}^{\infty}\langle T_n,\varphi\rangle,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$$

define una $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y $T=\sum_{n=1}^{\infty}T_n$. Además, según (2)

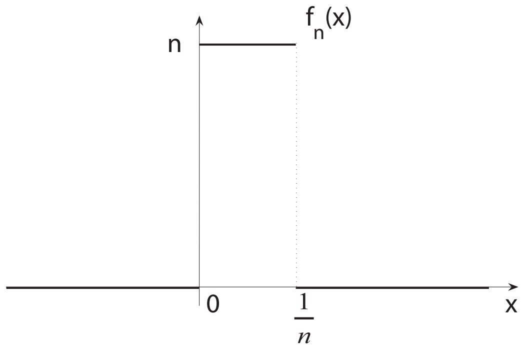
$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n = T \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \implies \sum_{n=1}^{\infty}T_n^{(k)} = T^{(k)};\quad k=0,1,2\cdots. \tag{4}$$

Las propiedades (2), (4) <u>eliminan por completo</u> la problemática que se presenta en el análisis clásico con respecto a la posibilidad de cambiar el orden en las operaciones de tomar el límite y tomar la derivada. Si una sucesión de funciones diferenciables (en sentido clásico) $\{f_n\}$ converge en $\mathbb{R}$ uniformemente a una función límite f, entonces f no tiene porque ser diferenciable (en sentido clásico), y aún si lo es no necesariamente $(f_n)'_{cl}(x)\longrightarrow f'_{cl}(x)$ (en la convergencia puntual usual). Pero f'_{gen} siempre existe y $(f_n)'_{gen}\overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} f'_{gen}$ si $n\to\infty$ siempre.

Veamos ahora algunos ejemplos:

Ejemplo 3. *Sea*

$$f_n(x)=\begin{cases} n; & 0\le x\le \frac{1}{n};\quad n=1,2,\cdots\\ 0, & \textit{otro caso.}\end{cases}$$



Tenemos $f_n\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ para todo n, de modo que $\{f_n\}$ es una sucesión de distribuciones *regulares. Tenemos para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,*

$$\langle f_n(x), \varphi(x)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} n\varphi(x)dx$$

$$\overset{t=nx}{=} \int\limits_{0}^{1} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt \quad \longrightarrow \quad \int\limits_{0}^{1} \varphi(0)dt = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x)\rangle,$$

de modo que según (1) tenemos que

$$f_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} \delta \ \ si \ \ n \to \infty.$$

Cuando $n \to \infty$, la gráfica de $f_n(x)$ se aproxima a un "clavo infinitamente alto e infinitamente delgado", mientras que el área bajo la gráfica de f_n es igual a 1 para todo n. De aquí viene la interpretación de Dirac considerando $\delta(x)$ como una "función" igual a 0 para $x \neq 0$, igual a ∞ en $x = 0$ y tal que el área bajo la gráfica de $\delta(x)$ es igual a 1: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$. Es claro que no existe una función con características tan exóticas. De hecho ya sabemos que $\delta(x)$ es una distribución y no una función.

Según (2) tenemos $(f_n)'_{gen} \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} \delta'$. Pero $(f_n)'_{gen}(x) = n\delta(x) - n\delta_{\frac{1}{n}}(x)$, de modo que

$$n\delta(x) - n\delta_{\frac{1}{n}}(x) \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} \delta'(x) \ \ si \ \ n \to \infty,$$

luego

$$n\delta'(x) - n\delta'_{\frac{1}{n}}(x) \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} \delta''(x) \ \ si \ \ n \to \infty, \ \cdots, \ \ etc.$$

Más ejemplos se consiguen en la guía de ejercicios resueltos del Profesor P. F. Hummelgens.

2. Cómputo de integrales.

Una aplicación importante del cálculo distribucional es el cómputo de integrales definidas. Antes de dar un ejemplo concreto, es preciso hacer algunas observaciones. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ hemos definido el corchete $\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Esta integral existe porque φ es de soporte compacto. Pero

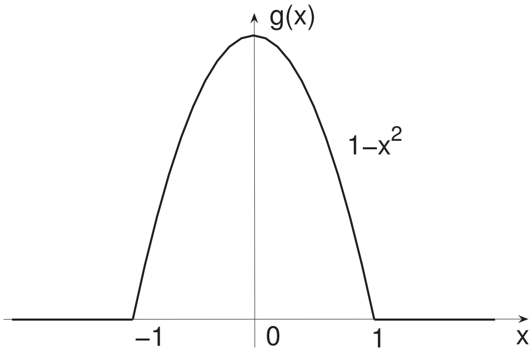
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$$

también existe si $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ es arbitraria (no necesariamente de soporte compacto) pero $\underline{f}$ <u>es de soporte compacto</u>, es decir, $\langle f, \phi \rangle$ está bien definido si f $\underline{\text{o}}$ ϕ (o ambas) es de soporte compacto.

Ejemplo 4. *Sea $f(x) = 1 - x^2$; $-1 \le x \le 1$. Se pide hallar $I = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx$ ($n \ge 1$ un entero). Clásicamente se calcula I mediante integración por partes, lo que da un cómputo algo tedioso, pero nuestro novedoso método permite hallar I <u>sin realizar integración alguna</u> (!!!).*

El primer paso es extender $f(x)$ a todo $\mathbb{R}$ definiendo

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x^2; & -1 \le x \le 1 \\ 0; & \textit{otro } x. \end{cases}$$



Entonces g es de soporte compacto, por lo tanto $\langle g, \phi \rangle$ es bien definido para todo $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Tomamos ahora $\phi(x) = \cos(n\pi x)$, $-\infty < x < \infty$, entonces

$$I = \langle g(x), \phi(x) \rangle. \tag{5}$$

Tenemos $\phi'(x) = -n\pi \operatorname{sen}(n\pi x)$, $\phi''(x) = -n^2\pi^2\cos(n\pi x) \Longrightarrow \phi''(x) = -n^2\pi^2\phi(x)$ ($\phi(x)$ reaparece luego de dos derivaciones). Ahora

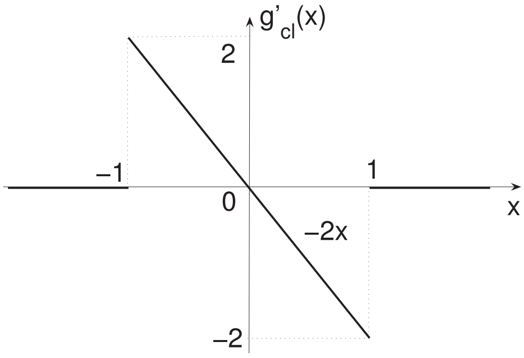
$$\langle g''_{gen}(x), \phi(x) \rangle = \langle g(x), \phi''(x) \rangle = \langle g(x), -n^2\pi^2\phi(x) \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad -n^2\pi^2 I = \langle g''_{gen}, \phi \rangle. \tag{6}$$

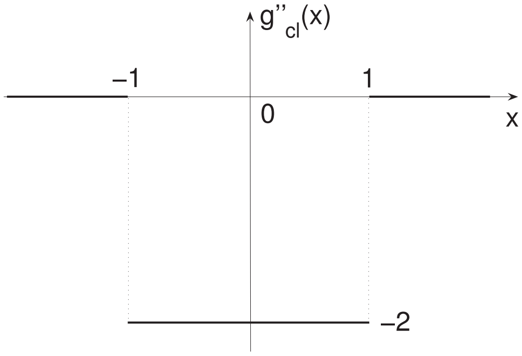
Ahora calculamos $\langle g''_{gen}, \phi \rangle$ y luego despejamos I de (6). Tenemos

$$g'_{gen}(x) = g'_{cl}(x)$$

con gráfica



$$\Longrightarrow \quad g''_{gen}(x) = g''_{cl}(x) + 2\delta_{-1}(x) + 2\delta_1(x)$$



$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \langle g''_{gen}, \phi\rangle &= \langle g''_{cl}, \phi\rangle + 2\langle \delta_{-1}, \phi\rangle + 2\langle \delta_1, \phi\rangle \\
&= -2 \int\limits_{-1}^{1} \cos(n\pi x)dx + 2\phi(-1) + \phi(1) \\
&= (-2)0 + 2\cos(-n\pi) + 2\cos(n\pi) = 4\cos(n\pi) = 4(-1)^n,
\end{aligned}$$

luego con (6)

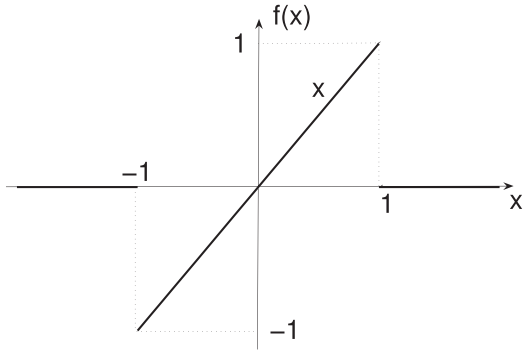
$$I = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Hicimos un cómputo sencillo, usando derivadas generalizadas, y mucho más corto que el método de la integración por partes.

Más ejemplos se consiguen en la guía de ejercicios resueltos del Profesor P. F. Hummelgens. Este tema del cómputo de integrales usando derivadas generalizadas es importante para todo el resto del curso .

Ejemplo 5. *Se pide hallar* $I = \int\limits_{-1}^{1} xe^{2x}dx$. *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} x; & -1 \leq x \leq 1 \\ 0; & otro\ x \end{cases}$$



y $\phi(x) = e^{2x}$. *Entonces* $I = \langle f, \phi \rangle$. *Tenemos*

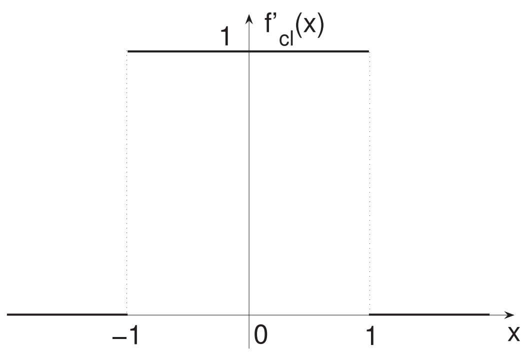
$$\phi'(x) = 2e^{2x}, \quad \phi''(x) = 4e^{2x} = 4\phi(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \langle f''_{gen}(x), \phi(x) \rangle = \langle f(x), \phi''(x) \rangle = 4\langle f, \phi \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad 4I = \langle f''_{gen}, \phi \rangle \tag{7}$$

Pero

$$f'_{gen}(x) = f'_{cl}(x) - \delta_{-1}(x) - \delta_1(x)$$



$$f''_{gen}(x) = f''_{cl}(x) + \delta_{-1}(x) - \delta_1(x) - \delta'_{-1}(x) - \delta'_1(x), \quad f''_{cl}(x) = 0 \ \ c.s.\ en\ \mathbb{R},$$

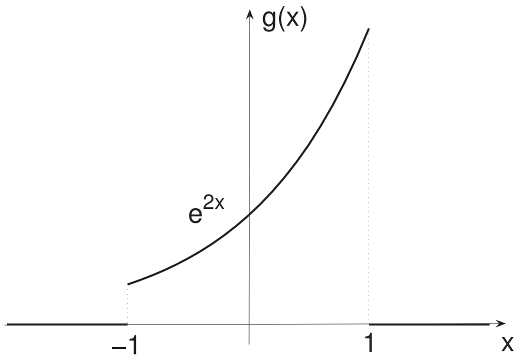
$$\Longrightarrow \quad f''_{gen}(x) = \delta_{-1}(x) - \delta_1(x) - \delta'_{-1}(x) - \delta'_1(x)$$

$$\begin{aligned}
\overset{(7)}{\Longrightarrow} \quad 4I &= \langle \delta_{-1}, \phi \rangle - \langle \delta_1, \phi \rangle - \langle \delta'_{-1}, \phi \rangle - \langle \delta'_1, \phi \rangle \\
&= \phi(-1) - \phi(1) + \phi'(-1) + \phi'(1) = e^{-2} - e^2 + 2e^{-2} + 2e^2 = 3e^{-2} + e^{-2}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad I = \frac{1}{4}\left(3e^{-2} + e^2\right).$$

Alternativamente podemos probar

$$g(x) = \begin{cases} e^{2x}; & -1 \leq x \leq 1 \\ 0; & \textit{otro } x \end{cases}$$



y $\psi(x) = x$. *Entonces* $I = \langle g, \psi \rangle$. *Tenemos* $\psi'(x) = 1$, $\psi''(x) = 0$,

$$\langle g''(x), \psi(x) \rangle = \langle g, \psi'' \rangle = \langle g, 0 \rangle = 0,$$

pero esto no lleva a nada.

Clase 5: La Convolución.

Peter Hummelgens

10 de diciembre de 2006

1. Soporte de una distribución.

Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y sea $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$ un abierto. Denotaremos por $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ el subespacio lineal de las $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $sop(\varphi) \subset \mathcal{O}$ (así $\mathcal{D}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$). Decimos que

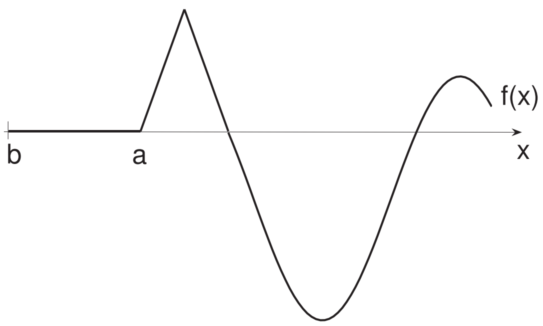
$$T = 0 \text{ en } \mathcal{O} \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \langle T, \varphi \rangle = 0 \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Luego, para $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ decimos que $T = S$ en $\mathcal{O} \overset{def.}{\Longleftrightarrow} T - S = 0$ en $\mathcal{O}$ (equivalentemente $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$). Definimos el soporte $sop(T)$ de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ como el complemento del abierto más grande donde $T = 0$. Así $sop(T)$ es el conjunto cerrado más pequeño en $\mathbb{R}$ fuera del cual $T = 0$. Con $sop(f)$ para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ entendemos $sop(T_f)$, donde T_f es la distribución regular definida por f.

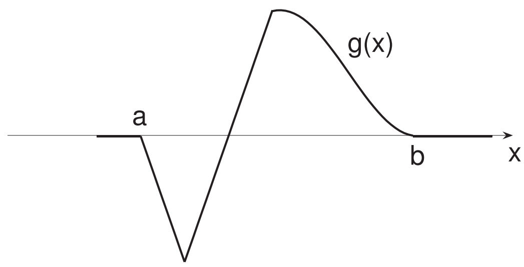
Tenemos $sop(\delta_a) = \{a\}$ ya que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} - \{a\}) \Longrightarrow \varphi(a) = 0 \Longrightarrow \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) = 0$. Decimos entonces que δ_a es una distribución concentrada en $x = a$. Similarmente δ'_a, δ''_a, $\cdots$ son distribuciones concentradas en $x = a$.

2. Distribuciones Causales.

Una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se llama distribución causal si, y sólo si, para algún $a \in \mathbb{R}$ tenemos $T = 0$ en $(-\infty; a)$. Entonces $sop(T) \subseteq [a; \infty)$ (pero también $sop(T) \subseteq [b, \infty)$ para todo $b < a$). Así una $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ es causal si, y sólo si, para algún $a \in \mathbb{R}$ tenemos $f(x) = 0$ $c.s.$ en $(-\infty; a)$. Una distribución de soporte compacto siempre es causal porque es 0 fuera de algún intervalo acotado y cerrado.



f es causal con $sop(f) = [a; \infty) \subset [b; \infty)$.



g es de soporte compacto con $sop(g) = [a; b) \subset [a; \infty)$.

Las δ_a, δ'_a, δ''_a, $\cdots$ son de soporte compacto $\{a\}$, por lo tanto son distribuciones causales.

Denotaremos por $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las distribuciones causales. En particular $\delta_a, \delta'_a, \delta''_a, \cdots \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R})$. Las funciones $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ en las figuras anteriores pertenecen a $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

3. La convolución de funciones.

Sea $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causales con $sop(f) \subseteq [a; \infty)$, $sop(g) \subseteq [b; \infty)$. Definimos el producto de convolución $f * g$ de f y g por

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi; \quad -\infty < x < \infty. \tag{1}$$

Para demostrar que la integral existe para todo $x \in \mathbb{R}$ vamos a probar que

$$(f * g)(x) = \int_a^{x-b} f(\xi)g(x-\xi)d\xi; \quad -\infty < x < \infty \tag{2}$$

(de modo que en (1) se trata en realidad de una integral sobre un intervalo acotado, la cual desde luego existe). En (1) tenemos $f(\xi) = 0$ $c.s.$ en $(-\infty; a)$ de modo que

$$(f * g)(x) = \int_a^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi; \quad -\infty < x < \infty. \tag{3}$$

Pero en (3) tenemos $\xi > x - b \Longrightarrow x - \xi < b \Longrightarrow g(x-\xi) = 0$, de modo que el limite de integración superior ∞ puede ser reemplazado por $x - b$. Esto demuestra (2) y la existencia de $(f * g)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se puede verificar que $\underline{f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})}$. Veamos ahora que $\underline{f * g \text{ es también causal}}$. Tenemos $x < a + b \Longrightarrow x - b < a \Longrightarrow \xi < a$ y por lo tanto $f(\xi) = 0$ en la integral de (2)

$$\begin{gathered} \Longrightarrow \quad (f * g) = 0 \text{ para } x < a + b, \text{ es decir} \\ f * g \text{ es causal con } sop(f * g) \subseteq [a + b; \infty). \end{gathered} \tag{4}$$

Haciendo en (1) el cambio de variable $\xi \longrightarrow t = x - \xi$ ($x \in \mathbb{R}$ fijo) tenemos

$$\begin{aligned} (f * g)(x) \quad &\stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi = -\int_{\infty}^{-\infty} f(x-t)g(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t)dt = (g * f)(x), \end{aligned}$$

es decir,

$$f * g = g * f \quad (* \text{ es conmutativo}). \tag{5}$$

Además es fácil comprobar que para $f, g, k \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ <u>causales</u> tenemos

$$(f * g) * k = f * (g * k) \quad \text{(ley asociativa)}. \tag{6}$$

y podemos escribir $f * g * k$ sin poner paréntesis, y por (5)

$$f * g * k = f * (k * g) = k * f * g = \cdots, \ etc.$$

Además tenemos para $f, g, k \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causales, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f * (g + k) &= f * g + f * k, \\ f * (\lambda g) &= \lambda f * g \end{aligned} \tag{7}$$

es decir, $f* : L^1_{loc}(\mathbb{R})_+ \longrightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R})_+$ $(g \longrightarrow f * g)$ es un operador lineal. El operador $f*$ se llama un operador de convolución.

Una manera para producir funciones causales es la multiplicación con una función de Heaviside. Así, si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = h_a(x)u(x)$ es causal con $sop(f) \subseteq [a; \infty)$. Sea también $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ y $g(x) = h_b(x)v(x)$ (podemos también escribir $f(x) = h(x-a)u(x)$, $g(x) = h(x-b)v(x)$ donde $h(t)$ es la función de heaviside centrada en $t = 0$). Entonces es fácil obtener de (2) la fórmula

$$\begin{gathered} (f * g)(x) = h(x - a - b) \int_a^{x-b} u(\xi)v(x - \xi)d\xi; \quad -\infty < x < \infty \\ \textit{cuando} \;\; f(x) = h(x-a)u(x), \; g(x) = h(x-b)v(x). \end{gathered} \tag{8}$$

El factor $h(x - a - b)$ frente de la integral es 0 para $x < a + b$, de manera que la formula muestra de manera explícita que $sop(f * g) \subseteq [a + b; \infty)$ (ver (4))

Ejemplo 1. *Sea* $\phi(x) = h(x) * h(x)\cos(2x);\ -\infty < x < \infty$. *Se pide hallar* $\phi(x)$ *en forma explícita. En (8) Tomamos* $f(x) = h(x)1(x)$ *(*$1(x) := 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*),* $g(x) = h(x)\cos(2x)$*. Entonces (8) da*

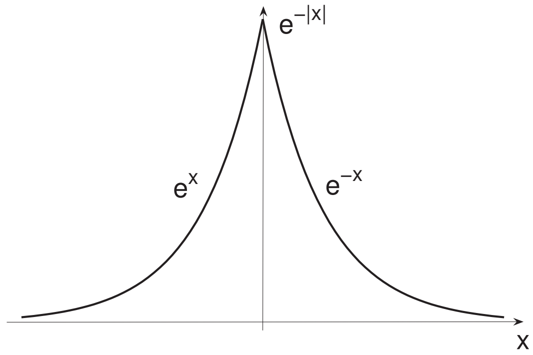
$$\begin{aligned} \phi(x) &= h(x)\int_0^x 1(\xi)\cos[2(x-\xi)]d\xi = h(x)\int_0^x \cos[2(x-\xi)]d\xi \\ &= \frac{1}{2}h(x)\,\mathrm{sen}(2x) \;\; \textit{luego de un computo elemental.} \end{aligned}$$

Verifique que $h(x)\cos(2x) * h(x)$ *da lo mismo.*

Hemos tomado un ejemplo bastante sencillo porque la evaluación de un producto de convolución mediante integración puede ser muy tedioso. Pero sobre todo porque vamos a conocer más adelante métodos más eficientes que frecuentemente permiten evitar el computo de integrales, usando derivadas generalizadas y las reglas operacionales de la convolución, y también la transformada de Laplace. Ejemplos donde se aplica la integración se consigue en la guía de ejercicios resueltos del Profesor Hummelgens.

El producto de convolución (1) también existe en casos donde f, g no son causales. Por ejemplo $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow$ existe $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. Así tenemos (ver la guía)

$$e^{-|x|} * e^{-|x|} = e^{-|x|}(1 + |x|); \quad -\infty < x < \infty.$$



Otros casos donde existe el producto de convolución mencionaremos más adelante.

4. La convolución de distribuciones.

Consideremos nuevamente el producto $f * g$ con $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causales. Vimos que $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, de modo que $f * g$ define una distribución regular. Tenemos para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle f * g, \varphi \rangle \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\varphi(x)dx \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi \right) \varphi(x)dx \\ &\overset{Fubini}{=} \quad \int\int_{\mathbb{R}^2} f(\xi)g(x-\xi)\varphi(x)dxd\xi = \int\int_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)\varphi(u+v)dudv,\end{aligned}$$

luego del cambio de variables $u = \xi$, $v = x - \xi$ (con x fijo). La formula obtenida,

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int\int_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)\varphi(u+v)dudv, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

hace ver como $f * g$ actúa como distribución. La integral doble puede escribirse (mediante Fubini) como corchetes compuestos (ó iteradas):

$$\begin{aligned}\langle f * g, \varphi \rangle &= \langle f(u), \langle g(v), \varphi(u+v) \rangle \rangle \\ &= \langle g(v), \langle f(u), \varphi(u+v) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).\end{aligned} \tag{9}$$

Podemos ahora definir $S * T$ para $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en analogía con (9) por

$$\begin{aligned}\langle S * T, \varphi \rangle &:= \langle S(u), \langle T(v), \varphi(u+v) \rangle \rangle \\ &= \langle T(v), \langle S(u), \varphi(u+v) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\end{aligned} \tag{10}$$

si es que los corchetes compuestos existen (lo que no siempre es el caso). En este caso tenemos

$$\begin{aligned} S * T &= T * S \\ S * (T + U) &= S * T + S * U \quad (\text{si existe } S * T,\ S * U). \end{aligned} \tag{11}$$

Mencionamos algunos casos donde la convolución existe:

(a) $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causales $\Longrightarrow$ existe $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y es causal.

(b) $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow$ existe $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

(c) $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, una de ellas en $L^1(\mathbb{R})$ y la otra acotada $\Longrightarrow$ existe $f * g \in C(\mathbb{R})$ y es acotada.

(d) $S, T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) \Longrightarrow$ existe $S * T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

(e) $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y una de ellas es de soporte compacto $\Longrightarrow$ existe $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y es de soporte compacto cuando S, T ambas son de soporte compacto.

5. Reglas operacionales.

Según (e) existe $\delta_a * T$ para todo $a \in \mathbb{R}$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Tenemos

$$\begin{aligned} \langle \delta * T, \varphi \rangle &\overset{(10)}{=} \langle T(v), \langle \delta(u), \varphi(u+v) \rangle \rangle = \langle T(v), \varphi(0+v) \rangle \\ &= \langle T(v), \varphi(v) \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \\ &\Longrightarrow \quad \delta * T = T, \quad T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \end{aligned} \tag{12}$$

en otras palabras: δ es el elemento neutro del producto de convolución.

Para describir el efecto de la convolución con δ_a ($a \neq 0$), introducimos el operador de traslación $\tau_a : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $(T \longrightarrow \tau_a T)$ cuya definición explicamos a continuación. Primero, para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definimos $\tau_a f$ por traslación de la gráfica de f, es decir,

$$(\tau_a f)(x) := f(x-a), \quad -\infty < x < \infty. \tag{13}$$

Tenemos para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle \tau_a f, \varphi \rangle &\overset{(13)}{=} \langle f(x-a), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\varphi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t+a)dt = \langle f(x), \varphi(x+a) \rangle, \end{aligned}$$

luego es natural definir

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle := \langle T(x), \varphi(x+a) \rangle; \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

También, en vista de (13) es natural escribir $T(x-a)$ en lugar de $(\tau_a T)(x)$, y en particular

$$\delta(x-a) := (\tau_a \delta)(x) \quad \Longrightarrow \quad \tau_a \delta = \delta_a, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

y así surge la notación $\delta(x-a)$ en lugar de $\delta_a(x)$ (la cual utilizaremos con frecuencia). Tenemos ahora

$$\begin{aligned} \langle \delta_a * T, \varphi \rangle &\overset{(10)}{=} \langle T(v), \langle \delta_a(u), \varphi(u+v) \rangle \rangle = \langle T(v), \varphi(v+a) \rangle \\ &\overset{(14)}{=} \langle \tau_a T, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

de modo que

$$\delta_a * T = T * \delta_a = \tau_a T, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

es decir, $\delta_a * = \tau_a$ es un operador de traslación y la traslación es un operador de convolución. Para $a = 0$ (16) da (12) de nuevo. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tenemos de (13), (16) que

$$\delta_a(x) * f(x) = f(x-a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Clase 6: Continuación.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

2. Según (e) existe $\delta^{(n)} * T$ para todo $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y tenemos

$$\begin{aligned}\langle \delta^{(n)} * T, \varphi \rangle &= \langle T(v), \langle \delta^{(n)}(u), \varphi(u+v)\rangle\rangle = \langle T(v), (-1)^n \varphi^{(n)}(0+v)\rangle \\ &= (-1)^{(n)} \langle T(v), \varphi^{(n)}(v)\rangle = \langle T^{(n)}, \varphi\rangle \ \text{ para } \underline{\text{todo}}\ \phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \delta^{(n)} * T = T * \delta^{(n)} = T^{(n)}; \ \ n = 0, 1, 2, \cdots, \ \ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{1}$$

En particular

$$\delta' * T = T',$$

es decir <u>la derivada distribucional es un operador de convolución</u>

$$\left(\frac{d}{dx}\right)_{gen} = \delta' * .$$

Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ podemos escribir (1) como

$$f^{(n)}_{gen}(x) = \delta^{(n)}(x) * f(x); \ \ n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{2}$$

Sea $L = a_0 + a_1 d/dx + \cdots + a_n d^n/dx^n$ un ODLCC, entonces para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, con (1),

$$\begin{aligned}LT &= a_0 T + a_1 T' + \cdots + a_n T^{(n)} = a_0 \delta * T + a_1 \delta' * T + \cdots + a_n \delta^{(n)} * T = \\ &= [a_0 \delta + a_1 \delta' + \cdots + a_n \delta^{(n)}] * T,\end{aligned}$$

de modo que (1) se generaliza a

$$LT = T * (L\delta) = (L\delta) * T, \ \ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3}$$

3. Si existe $S * T$ entonces existen $(\tau_a S) * T$, $S * (\tau_a T)$ y

$$\begin{aligned}\langle \tau_a(S * T), \varphi \rangle &= \langle (S * T)(x), \varphi(x+a)\rangle = \langle S(u), \langle T(v), \varphi(u+v+a)\rangle\rangle \\ &= \langle S(u), \langle (\tau_a T)(v), \varphi(u+v)\rangle\rangle = \langle S * (\tau_a T), \varphi\rangle, \ \text{ para } \underline{\text{todo}}\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \tau_a(S*T) = S*(\tau_a T),$$

entonces también

$$\tau_a(S*T) = \tau_a(T*S) = T*(\tau_a S) = (\tau_a S)*T.$$

Finalmente

$$\tau_a(S*T) = (\tau_a S)*T = S*\tau_a(T), \quad a \in \mathbb{R} \tag{4}$$

en palabras: para trasladar $S*T$ basta trasladar <u>uno</u> de los factores.

4. Si existe $S*T$, entonces existen $S'*T$ y $S*T'$ y tenemos

$$\begin{aligned}
\langle (S*T)', \varphi\rangle &= -\langle S*T, \varphi'\rangle = -\langle S(u), \langle T(v), \varphi'(u+v)\rangle\rangle \\
&= \langle S(u), -\langle T(v), \varphi'(u+v)\rangle\rangle = \langle S(u), \langle T'(v), \varphi(u+v)\rangle\rangle \\
&= \langle S*T', \varphi\rangle \ \text{ para } \underline{\text{todo}}\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow (S*T)' = S*T'$, entonces también

$$(S*T)' = (T*S)' = T*S'$$

entonces

$$(S*T)' = S'*T = S*T' \tag{5}$$

en palabras: para tomar la DG de $S*T$ basta tomar la DG de <u>uno</u> de los factores. Aplicación repetida de (5) da

$$(S*T)'' = ((T*S)')' = (S'*T)' = S''*T = S'*T' = S*T'' = \cdots, \quad etc,$$

y es claro que

$$(S*T)^{(n)} = S^k * T^{(n-k)}; \quad n = 1, 2, \cdots; \quad 0 \le k \le n. \tag{6}$$

¡Podemos mover arbitrariamente las DG de un factor a otro!. Más generalmente: para un ODLCC L tenemos

$$L(S*T) = (LS)*T = S*(LT), \quad \text{si existe } S*T. \tag{7}$$

5.- Para $f, g, k \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causales o más generalmente $f.g.k \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ tenemos

$$(f*g)*k = f*(g*k) = f*g*k \ \text{ (no hace falta poner paréntesis.)}$$

<u>Lo mismo vale en $L^1(\mathbb{R})$</u>. Además, si $S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ con todos los S_i <u>excepto posiblemente uno</u> de soporte compacto, entonces existe $S_1 * \cdots * S_n$ donde podemos poner paréntesis de manera arbitraria.

1. Ejemplos varios.

A continuación presentaremos aplicaciones de las reglas operacionales

Ejemplo 1. *Se pide hallar $\phi(x) = h(x) * h(x)\cos(2x)$. Esto hicimos en la clase anterior mediante integración. Ahora podemos hacerlo más fácilmente sin integración*

$$\begin{aligned}
\phi(x) = h(x) * h(x)\cos(2x) &= h(x)\left(\frac{1}{2}h(x)\,\mathrm{sen}(2x)\right)'_{gen} \\
&\overset{(5)}{=} \frac{1}{2}h'_{gen}(x) * h(x)\,\mathrm{sen}(2x) = \frac{1}{2}\delta(x) * h(x)\,\mathrm{sen}(2x) \\
&= \frac{1}{2}h(x)\,\mathrm{sen}(2x), \quad \textit{listo.}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2. *Sean $f(x) = e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$ y*

$$g(x) = \begin{cases} 1; & -1 \le x \le 1 \\ 0; & \textit{otro } x. \end{cases}$$

Como g es de soporte compacto, existe $f * g$. Sea $k = f * g$, entonces

$$\begin{aligned}
k'_{gen}(x) &\overset{(5)}{=} f(x) * g'_{gen} = e^{-|x|} * [\delta_{-1}(x) - \delta_1(x)] \\
&= e^{-|x+1|} - e^{-|x-1|}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad k'_{gen}(x) = \begin{cases} \frac{e^2-1}{e}e^x; & x < -1 \\ -\frac{2}{e}\,\mathrm{senh}(x); & -1 < x < 1 \\ -\frac{e^2-1}{e}e^{-x}; & x > 1 \end{cases},$$

luego por integración

$$k(x) = \begin{cases} \frac{e^2-1}{e}e^x + c_1; & x < -1 \\ -\frac{2}{e}\cosh(x) + c_2; & -1 < x < 1 \\ \frac{e^2-1}{e}e^{-x} + c_3; & x > 1 \end{cases}$$

con c_1, c_2, c_3 constantes. Pero sabemos que $k \in L^1(\mathbb{R})$, lo que implica que $\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = 0$ $\Longrightarrow c_1 = c_3 = 0$. Además k debe ser continua porque la expresión para $k'_{gen}(x)$ no contiene deltas, y esto implica $c_2 = 2$. Con esto $k(x)$ queda determinada.

Ejemplo 3. *Sean*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \textit{otro } x. \end{cases}$$

y $g(x) = e^{\lambda x}$*;* $-\infty < x < \infty$ *(*$\lambda \neq$ *0 una constante). Entonces* $k(x) = f(x) * g(x)$ *existe porque* f *es de soporte* <u>*compacto*</u>*. Tenemos*

$$k(x) = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2) e^{\lambda(x-\xi)} d\xi,$$

pero <u>*no*</u> *vamos a calcular esta integral. Tenemos* $k'''_{gen}(x) \overset{(5)}{=} f(x) * g'''_{gen}(x) = f(x) * \lambda^3 g(x)$

$$\Longrightarrow \quad k'''_{gen}(x) = \lambda^3 k(x).$$

Pero también

$$\begin{aligned} k'''_{gen}(x) &\overset{(5)}{=} f'''(x) * g(x) = [-2\delta_{-1}(x) + 2\delta_1(x) + 2\delta'_{-1}(x) + 2\delta'_1(x)] * g(x) \\ &= -2g(x+1) + 2g(x-1) + 2\delta_{-1}(x) * g'(x) + 2\delta_1(x) * g'(x) \\ &= -2g(x+1) + 2g(x-1) + 2g'(x+1) + 2g'(x-1) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad k'''_{gen}(x) = -2e^{\lambda(x+1)} + 2e^{\lambda(x-1)} + 2\lambda e^{\lambda(x+1)} + 2\lambda e^{\lambda(x-1)}$$

$$\Longrightarrow \quad k(x) = \frac{2}{\lambda^3}\left[(\lambda-1)e^{\lambda} + (\lambda+1)e^{-\lambda}\right] e^{\lambda x}; \quad -\infty < x < \infty.$$

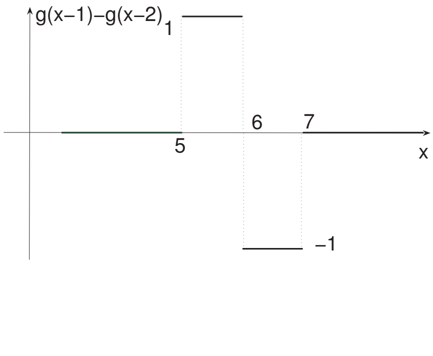
Ejemplo 4. *Sean*

$$f(x) = \begin{cases} 1; & 1 \leq x \leq 2 \\ 0; & otro\ x. \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 1, & 4 \leq x \leq 5 \\ 0, & otro\ x. \end{cases}$$

Existe $k = f * g$ *porque ambos factores son de soporte compacto y sabemos que* k *tiene que ser de soporte compacto. Tenemos*

$$k'_{gen}(x) \overset{(5)}{=} f'_{gen}(x) * g(x) = [\delta_1(x) - \delta_2(x)] * g(x) = g(x-1) - g(x-2).$$

La gráfica de $g(x-1) - g(x-2)$ *se consigue fácilmente y es*



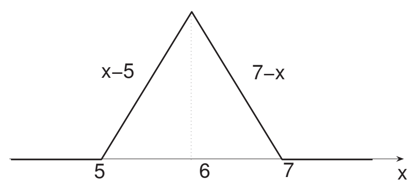
Ahora, de $k(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} k'_{gen}(t)dt$ tenemos

$$\text{para } x < 5\text{: } k(x) = 0$$

$$\text{para } 5 < x < 6 : k(x) = \int\limits_{5}^{x} 1dt = x - 5$$

$$\text{para } 6 < x < 7\text{: } k(x) = 1 + \int\limits_{6}^{x} (-1)dt = 1 - (x - 6) = 7 - x$$

$$\text{para } x > 7\text{: } k(x) = 0$$



2. Aplicación a ED con coeficientes constantes.

Sea L un ODLCC y consideremos la ED

$$Lu(x) = f(x), \ \ -\infty < x < \infty \tag{8}$$

donde $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dada y buscamos soluciones $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. El problema principal es encontrar una solución particular $u_p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de (8) (la ED $Lu(x) = 0$ tiene en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ únicamente las soluciones clásicas $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ que se consigue con métodos elementales de Mat. IV). Sea $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ una s.f. de L y supongamos que existe $E * f$ $(= f * E)$. Entonces

$$L(E * f) \overset{(7)}{=} (LE) * f = \delta * E = E$$

$\Longrightarrow u_p = E * f$ es una solución particular de (8).

Ejemplo 5. *Sea la ED*

$$u''(x) + u(x) = h(x-1)e^x, \ \ -\infty < x < \infty. \tag{9}$$

Ya conocemos la s.f. $E(x) = h(x)\,\mathrm{sen}(x)$ *de* $L = d^2/dx^2 + 1$ *(el ODLCC que figura en (9)). Como* $E(x)$ *y* $h(x-1)e^x$ *son ambas causales, existe* $E(x) * h(x-1)e^x$ *y*

$$u(x) = E(x) * h(x-1)e^x = h(x)\,\mathrm{sen}(x) * h(x-1)e^x \tag{10}$$

es una solución particular de (10).

Tenemos $u(x) = h(x-1)\int\limits_0^{x-1} \operatorname{sen}(\xi) e^{x-\xi} d\xi = h(x-1)e^x \int\limits_0^{x-1} \operatorname{sen}(\xi) e^{-\xi} d\xi$, *la integral es fácil (2 integraciones por partes) y obtenemos*

$$u(x) = \frac{1}{2} h(x-1) \left[e^x - e \operatorname{sen}(x-1) - e \cos(x-1) \right]. \tag{11}$$

Alternativamente (sin integración)

$$u(x) = h(x) \operatorname{sen}(x) * h(x-1)e^x \quad \overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad u'_{gen}(x) = h(x) \operatorname{sen}(x) * \left[h(x-1)e^x + e\delta_1(x) \right]$$

$$\Longrightarrow \quad u'_{gen}(x) = u(x) + eh(x-1) \operatorname{sen}(x-1)$$

$$\Longrightarrow \quad u''_{gen}(x) = u'_{gen}(x) + eh(x-1) \cos(x-1)$$

$$\Longrightarrow \quad u''_{gen} = u(x) + eh(x-1) \operatorname{sen}(x-1) + eh(x-1) \cos(x-1).$$

Pero también $u''_{gen}(x) = -u(x) + h(x-1)e^x$ *(ya que* u *es solución de (10))*

$$\overset{restando}{\longrightarrow} \quad 0 = 2u(x) + eh(x-1) \left[\operatorname{sen}(x-1) + \cos(x-1) \right] - h(x-1)e^x$$

$$\Longrightarrow \quad u(x) = \frac{1}{2} h(x-1) \left[e^x - e \operatorname{sen}(x-1) - e \cos(x-1) \right],$$

en acuerdo con (11).

La solución general de $Lv(x) = 0$ *es* $v(x) = A\cos(x) + B \operatorname{sen}(x)$ *(*$A, B \in \mathbb{C}$ *arbitrarias)* $\Longrightarrow$ *la solución general de (9) es*

$$u(x) = \frac{1}{2} \left[e^x - e \operatorname{sen}(x-1) - e \cos(x-1) \right] + A\cos(x) + B \operatorname{sen}(x).$$

Clase 7: Continuación.

Peter Hummelgens

12 de noviembre de 2006

Ejemplo 1. *(a) Sea la ED*

$$-u''(x) + u(x) = f(x); \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \textit{otro } x. \end{cases}$$

En la Clase 3 vimos que

$$E(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

es s.f. de

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + 1$$

(el ODLCC que figura en la ED). Como sop(f) es compacto, existe $E(x) * f(x)$ y $u_p = E(x) * f(x)$ es entonces una solución particular de (1) (ver Clase 6). "Por suerte" ya calculamos este producto de convolución en el segundo ejemplo de la Clase 6:

$$u_p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^2-1}{2e}e^x; & x < -1 \\ 1 - \dfrac{1}{e}\cosh(x); & -1 < x < 1 \\ \dfrac{e^2-1}{2e}e^{-x}; & x > 1. \end{cases}$$

La solución general de (1) es $u(x) = u_p(x) + Ae^x + Be^{-x}$ (patrimonio cultural: <u>otra</u> forma de la solución general de $v''(x) - k^2 v(x) = 0$ $(k > 0)$ es $v(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$, ver la clase 3 para la forma hiperbólica equivalente).

(b) Sea la ED

$$-u''(x) + u(x) = \delta(x) + \delta''(x); \quad -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Una solución particular es

$$u_p(x) = E(x) * [\delta(x) + \delta''(x)] = E(x) + E''_{gen}(x) \tag{3}$$

pero

$$-E''(x)_{gen} + E(x) = \delta(x) \implies E''_{gen}(x) = E(x) - \delta(x),$$

luego con (3),

$$u_p(x) = 2E(x) - \delta(x) = e^{-|x|} - \delta(x).$$

La solución general de (2) es

$$u(x) = e^{-|x|} - \delta(x) + Ae^x + Be^{-x}.$$

(c) *Sea la ED*

$$-u''(x) + u(x) = h(x); \quad -\infty < x < \infty. \tag{4}$$

Ahora hay dudas sobre la existencia de $E(x) * h(x)$ *ya que ambos factores no son de soporte compacto. Pero en la Clase 3 encontramos otra s.f. de* $L = -d^2/dx^2 + 1$ *que es causal, a saber*

$$E_1(x) = -h(x)\,\mathrm{senh}(x),$$

y $E_1(x) * h(x)$ *existe ya que ambos factores son causales. Entonces* $u_p(x) = E_1(x) * h(x)$ *es una solución particular de (4). Tenemos*

$$u_p(x) = -h(x)\,\mathrm{senh}(x) * h(x) = -h(x)\int_0^x \mathrm{senh}(\xi)d\xi = -h(x)[\cosh(\xi)]_0^x$$

$$\implies u_p(x) = h(x)[1 - \cosh(x)].$$

Verifiquemos la solución:

$$(u_p)'_{gen}(x) = -h(x)\,\mathrm{senh}(x) \quad (h(x)[1-\cosh(x)] \textit{ no tiene saltos})$$

$$\implies (u_p)''_{gen}(x) = -h(x)\cosh(x) \quad (h(x)\,\mathrm{senh}(x) \textit{ no tiene saltos.})$$

$$\implies -(u_p)''_{gen}(x) + u_p = h(x)\cosh(x) + h(x)[1-\cosh(x)] = h(x),$$

como debe ser.

Observación 1. *El último ejemplo ilustra que para encontrar una solución particular de* $Lu(x) = f(x)$ *se impone escoger una s.f.* E *de* L *adaptada a* f *en el sentido que esté asegurada la existencia de* $E * f$.

Otra aplicación importante es a la resolución de problemas de valor inicial (PVI)

Ejemplo 2. *Sea el PVI*

$$u''(x) + 4u(x) = g(x); \quad -\infty < x < \infty \tag{5}$$

$$u(a) = 1, \quad u'(a) = -1 \tag{6}$$

donde $a \in \mathbb{R}$, $g \in C(\mathbb{R})$ dados. De la teoría general de los PVI sabemos que el problema tiene solución única (existencia y unicidad) $u \in C^2(\mathbb{R})$ (si la ED fuera de orden n, tendremos $u \in C^n(\mathbb{R})$). Este hecho es esencial para el procedimiento que sigue.

Como primer paso vamos a reemplazar el PVI por una sola ED en sentido distribucional. Sea $u(x)$ la solción buscada, entonces ponemos

$$v(x) := h(x-a)u(x); \quad -\infty < x < \infty \tag{7}$$

De lo anterior dicho vemos que $v(x)$ es de clase C^2 en $(-\infty; a]$ y $[a; \infty)$ (a trozos). Entonces $v(x)$, $v'_{cl}(x)$ pueden tener saltos únicamente en $x = a$. Entonces

$$v'_{gen}(x) = h(x-a)u'(x) + u(a)\delta_a(x) \overset{(6)}{=} h(x-a)u'(x) + \delta_a(x),$$

$$\begin{aligned} v''_{gen}(x) &= h(x-a)u''(x) + u'(a)\delta_a(x) + \delta'_a(x) \overset{(6)}{=} h(x-a)u''(x) - \delta_a(x) + \delta'_a(x) \\ &\overset{(7)}{\Longrightarrow} \quad v''_{gen}(x) + 4v(x) = h(x-a)[u''(x) + 4u(x)] - \delta_a(x) + \delta'_a(x) \\ &\overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad v''_{gen}(x) + 4v(x) = h(x-a)g(x) - \delta_a(x) + \delta'_a(x), \end{aligned} \tag{8}$$

y tenemos el PVI resumida en una sola ED.

Como segundo paso vamos a resolver (8). La s.f. causal de $L = d^2/dx^2 + 4$, es como ya sabemos, $E(x) = \frac{1}{2}h(x)\,\mathrm{sen}(2x)$ y como el miembro derecho de (8) es causal también, sabemos que $v(x) = E(x) * [h(x-a)g(x) - \delta_a(x) + \delta'(x)]$ es solución de (8). Tenemos

$$\begin{aligned} v(x) &= E(x) * h(x-a)g(x) - E(x) * \delta_a(x) + E(x) * \delta'_a(x) \\ &= E(x) * h(x-a)g(x) - E(x-a) + E'_{gen}(x-a), \end{aligned}$$

pero $E'_{gen}(x) = h(x)\cos(2x)$, entonces

$$v(x) = E(x) * h(x-a)g(x) - h(x-a)\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}[2(x-a)] - \cos[2(x-a)]\right). \tag{9}$$

Para calcular el producto de convolución en (9) podemos probar aplicar las reglas operacionales de la convolución o utilizar integración usando

$$\begin{aligned} E(x) * h(x-a)g(x) &= h(x-a)g(x) * E(x) \\ &= \frac{1}{2}h(x-a)\int\limits_a^x g(\xi)\operatorname{sen}[2(x-\xi)]d\xi. \end{aligned} \tag{10}$$

De (9), (10) finalmente

$$v(x) = h(x-a)\left(\frac{1}{2}\int\limits_a^x g(\xi)\operatorname{sen}[2(x-\xi)]d\xi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}[2(x-a)] + \cos[2(x-a)]\right)$$

y comparando con (7), $v(x) = h(x-a)u(x)$, obtenemos la solución final

$$u(x) = \frac{1}{2}\int\limits_a^x g(\xi)\operatorname{sen}[2(x-\xi)]d\xi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}[2(x-a)] + \cos[2(x-a)] \quad -\infty < x < \infty$$

del PVI. La integral de convolución podemos evaluar cuando conocemos la forma explícita de $g(x)$.

Para más ejemplos ver la guía de ejercicios resueltos del profesor P. F. Hummelgens.

Una ED con coeficientes constantes $Lu(x) = g(x)$ puede escribirse como una ecuación de convolución: $(L * \delta) * u = g$. Más generalmente una ecuación de convolución (EC) es de la forma

$$f(x) * u(x) = g(x); \quad -\infty < x < \infty, \tag{11}$$

donde $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ distribuciones dadas (para la ED anterior $f = L\delta$). Por ejemplo, si $f \in \mathcal{D}'_+\mathbb{R}$ entonces $f * u \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ para todo $u \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ y podemos resolver (11) para una $g \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ dada (las mismas observaciones si reemplazamos $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ por $L^1(\mathbb{R})$ por ejemplo). Si $f \in \mathcal{D}'$ es de soporte compacto, entonces existe $f(x) * u(x)$ para todo $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Sea $f*$ un operador de convolución, entonces una $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $f * E = \delta$ se llama una solución fundamental (s.f.) del operador de convolución $f*$. Como $f*$ es un operador lineal, la s.f. general de $f*$ es $\xi = E(x) + v(x)$, donde $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la solución general de la ecuación de convolución homogénea $f(x) * v(x) = 0$.

Consideremos (11) en el espacio $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, es decir, supongamos $f, g \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ y buscamos soluciones $u \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Sea $E \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ una s.f. de $f*$, entonces existe $E(x)*g(x) = g(x)*E(x)$ (ya que ambos factores son causales) y

$$f * (E * g) = (f * E) * g = \delta * g = g$$

$$\Longrightarrow \quad u_p(x) = E(x) * g(x) \tag{12}$$

es una solución particular de (11), y la solución general de (11) es $u(x) = E(x) * g(x) + v(x)$, donde $v(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea $f * v = 0$.

Ejemplo 3. *(a) Sea la EC*

$$h(x) * u(x) = g(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{13}$$

donde $g \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ dada, y buscamos una solución causal $u \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Tenemos

$$h(x) * u(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad h'_{gen}(x) * u(x) = g'_{gen}(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \delta(x) * u(x) = g'_{gen}(x) \quad \Longrightarrow \quad u_p(x) = g'_{gen}(x)$$

es una solución particular de (13) y es causal. La EC homogénea es

$$h(x) * v(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad h'_{gen}(x) * v(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta(x) * v(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v(x) = 0,$$

de modo que la EC homogénea tiene únicamente la solución trivial $v(x) = 0$. Por lo tanto (13) tiene solución única en $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, dada por

$$u(x) = g'_{gen}(x)$$

(b) Sea la EC

$$h(x)x^2 * u(x) = h(x)\operatorname{sen}(2x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{14}$$

Tenemos

$$h(x)x^2 * u(x) = h(x)\operatorname{sen}(2x) \quad \Longrightarrow \quad 2h(x)x * u(x) = 2h(x)\cos(2x)$$

$$\Longrightarrow \quad 2h(x)*u(x) = -4h(x)\operatorname{sen}(2x)+2\delta(x) \quad \Longrightarrow \quad 2\delta(x)*u(x) = -8h(x)\cos(2x)+2\delta'(x)$$

$$\Longrightarrow \quad u_p(x) = -4h(x)\cos(2x) + \delta'(x)$$

es solución particular causal de (14). Nuevamente la EC homogénea tiene únicamente la solución trivial, por lo tanto $u_p(x)$ es la solución de (14) en $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

Alternativamente podemos primero buscar una s.f. causal $E(x)$ de $h(x)x^2$:

$$h(x)x^2 * E(x) = \delta(x) \quad \Longrightarrow \quad 2h(x)x * E(x) = \delta'(x) \quad \Longrightarrow \quad 2h(x) * E(x) = \delta''(x)$$

$$\implies \quad 2E(x) = \delta'''(x) \quad \implies \quad E(x) = \frac{1}{2}\delta'''(x).$$

Ahora según (12),

$$\begin{aligned} u_p(x) &= \frac{1}{2}\delta'''(x) * h(x)\,\mathrm{sen}(2x) = \frac{1}{2}(h(x)\,\mathrm{sen}(2x))'''_{gen} \\ &= -4h(x)\cos(2x) + \delta'(x), \end{aligned}$$

como antes. Más ejemplos de ecuaciones de convolución presentaremos en la clase 10.

Clase 8: La Transformada de Laplace.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

1. Transformada de Laplace de funciones.

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causal , $sop(f) \subseteq [a; \infty)$. Consideremos la integral de Laplace

$$F(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz} f(t)dt, \quad z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

donde $z = \xi + i\eta$ una variable compleja. Decimos que $f(t)$ es Laplace transformable si, y sólo si, la integral converge absolutamente (es decir $e^{-tz} f(t)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ como función de t) para algún $z \in \mathbb{C}$. Sea $f(t)$ Laplace transformable con la integral absolutamente convergente para $z = z_0$ ($Re\ z_0 = \xi_0$). Como $sop(f) \subseteq [a; \infty)$ tenemos de (1)

$$F(z) = \int_{a}^{\infty} e^{-tz} f(t)dt, \tag{2}$$

donde converge y tenemos

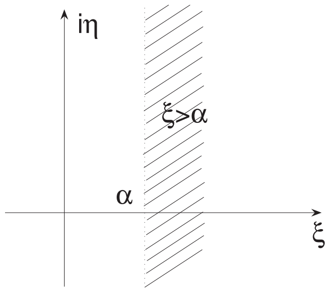
$$Re\ z = \xi \geq \xi_0 \implies |e^{-tz} f(t)| = |e^{-t(\xi+i\eta)}||f(t)| = e^{-t\xi}|f(t)| \leq e^{-t\xi_0}|f(t)|$$

con $\int_a^\infty e^{-t\xi_0}|f(t)|dt$ convergente, de modo que converge también $\int_a^\infty |e^{-tz} f(t)|dt$ para $\xi \geq \xi_0$. De lo anterior se desprende que para la integral de Laplace (1) hay 3 posibilidades:

(a) No converge para todo $z \in \mathbb{C}$ (un ejemplo es $h(t)e^{t^2}$, que crece demasiado rápido cuando $t \to \infty$), y $f(t)$ no es Laplace transformable.

(b) Converge para todo $z \in \mathbb{C}$ (un ejemplo es $h(t)e^{-t^2}$, que decrece a o sumamente rápido cuando $t \to \infty$), y $F(z)$ está definida en todo el plano $\mathbb{C}$.

(c) El caso "más común": La integral de Laplace converge absolutamente en algún semiplano $\xi = Re\ z > \alpha$,



y diverge o no converge absolutamente en $\xi < \alpha$. Podemos interpretar el caso (b) como el caso (c) con $\alpha = -\infty$ y el caso (a) como el caso (c) con $\alpha = \infty$.

En el semiplano $\xi > \alpha$, $F(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-tz} f(t) dt$ es una función analítica (Mat. VI) de z, ya que podemos calcular las derivadas de $F(z)$ por derivación bajo la integral:

$$F'(z) = \frac{d}{dz} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-tz} f(t) dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz}(e^{-tz}) f(t) dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-tf(t)) e^{-tz} dt,$$

es decir, cuando

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(z), \quad \text{entonces} \\ -tf(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F'(z), \quad \text{y más generalmente} \\ (-t)^n f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F^{(n)}(z); \quad n = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

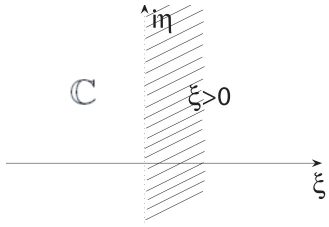
Aquí introducimos la notación $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$, para $f(t)$ Laplace transformable, cuya interpretación precisa requiere de algunos comentarios. Primero un ejemplo.

Ejemplo 1. *Sea $f(t) = h(t-a)$. Tenemos*

$$F(z) = \int\limits_{a}^{\infty} e^{-tz} 1 dt = -\frac{1}{z}\left[e^{-tz}\right]_{t=a}^{\infty} = \frac{e^{-az}}{z} - \frac{1}{z}\left[e^{-tz}\right]_{t\to\infty}$$

Pero $|e^{-tz}| = |e^{-t(\xi + i\eta)}| = e^{-t\xi}$ es acotada para $t \to \infty$ si, y sólo si, $\xi \geq 0$ y vemos entonces que existe $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{z} e^{-tz}$ solamente si $\xi > 0$ y en este caso el límite es cero, es decir,

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-tz} f(t) dt = \frac{e^{-az}}{z} \quad \textit{en el semiplano } Re\ z > 0$$



Pero observamos que la función $\frac{e^{-az}}{z}$ *es analítica en todo el plano* $\mathbb{C}$ *(también en* $\xi < 0$*) excepto en* $z = 0$ *(donde tiene un polo simple). Es la función* $\frac{e^{-az}}{z}$ *definida y analítica en todo* $\mathbb{C} - \{0\}$ *que nos importa y es de importancia secundaria el hecho que en el semiplano* $\xi > 0$ *podemos representar* $\frac{e^{-az}}{z}$ *como la integral de Laplace* $\int\limits_a^\infty e^{-tz}dt$*. Por la transformada de Laplace de* $h(t-a)$ *entendemos* $\frac{e^{-az}}{z}$ *en toda su región de analiticidad en el plano complejo. Escribimos entonces*

$$h(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{e^{-az}}{z} \quad (a \in \mathbb{R}),$$

sin agregar Re $z > 0$*. Así entonces, con* $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$ *indicamos que* $f(t)$ *es Laplace transformable y tiene transformada de Laplace* $F(z)$ *como función analítica en toda su región de analiticidad.*

Presentaremos una pequeña tabla de transformadas

$$\begin{aligned}
h(t-a) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{e^{-az}}{z} \quad (a \in \mathbb{R}), \quad h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z} \\
h(t)e^{\lambda t} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z-\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \\
h(t)\cos(at) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{z}{z^2+a^2}, \quad h(t)\operatorname{sen}(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{z^2+a^2} \quad (a \in \mathbb{R}) \\
h(t)\cosh(at) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{z}{z^2-a^2}, \quad h(t)\operatorname{senh}(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{z^2-a^2} \quad (a \in \mathbb{R}) \\
h(t)t^n e^{\lambda} t &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{(z-\lambda)^{n+1}}, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, \quad \lambda \in \mathbb{C}).
\end{aligned} \tag{4}$$

Todas estas formulas se pueden obtener directamente de (2) via integración, pero más adelante (cuando tenemos la TL de distribuciones y las reglas operacionales de la TL) tendremos métodos muchos más eficientes para obtener estás transformadas (sin integraciones.)

2. Transformada de Laplace de distribuciones.

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ de soporte compacto, entonces podemos escribir $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-tz} f(t)dt$ como corchete,

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z) = \langle f(t), e^{-tz} \rangle_t, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

donde $\langle \ , \ \rangle_t$ significa que la variable en el corchete es t (y no z). El corchete existe para todo $z \in \mathbb{C}$, es decir, $F(z)$ es definida y analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ (es decir una función entera). Ahora será claro que la misma fórmula (5) tiene sentido para distribuciones de soporte compacto. Así que adoptamos (5) como definición de $F(z)$ para $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ una distribución de soporte compacto. Sea $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de soporte compacto, entonces $f'_{gen}, f''_{gen}, \cdots$ también son de soporte compacto, por lo tanto

$$\begin{aligned}
f^{(n)}_{gen}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle f^{(n)}_{gen}(t), e^{-tz} \rangle_t &= (-1)^n \langle f(t), \frac{d^n}{dt^n}(e^{-tz}) \rangle \\
&= (-1)^n \langle f(t), (-z)^n e^{-tz} \rangle_t \\
&= (-1)^n (-z)^n \langle f(t), e^{-tz} \rangle_t \\
&= z^n \langle f(t), e^{-tz} \rangle_t \\
&= z^n F(z),
\end{aligned}$$

es decir,

$$f^{(n)}_{gen}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} z^n F(z); \quad n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{6}$$

Ejemplo 2. $\delta_a(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle \delta_a(t), e^{-tz} \rangle_t = e^{-az}$, *entonces*

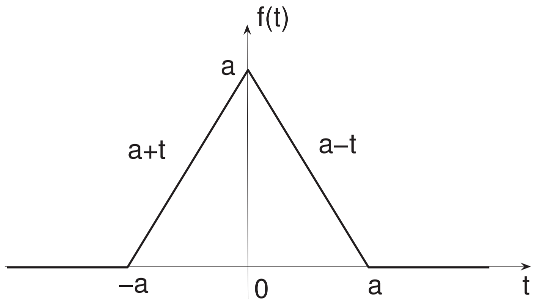
$$\begin{aligned}
\delta_a(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-az} \quad (a \in \mathbb{R}) \\
\delta(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} 1
\end{aligned} \tag{7}$$

y de (6), (7) tenemos

$$\begin{aligned}
\delta^{(n)}_a(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} z^n e^{-az} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots , \quad a \in \mathbb{R}) \\
\delta(t)^{(n)} &\xrightarrow{\mathcal{L}} z^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).
\end{aligned} \tag{8}$$

La fórmula (6) es muy útil para hallar transformadas de Laplace, como ilustra el próximo ejemplo.

Ejemplo 3. *Sea $f(t)$ con gráfica*



En un ejemplo ya visto encontramos que

$$f''_{gen}(t) = \delta_{-a}(t) - 2\delta(t) + \delta_a(t),$$

entonces con (6), (7) se sigue que

$$z^2 F(z) = e^{az} - 2 + e^{-az} \quad \Longrightarrow \quad F(z) = \frac{e^{az} - 2 + e^{-az}}{z^2},$$

¡eso es todo!. Como $f(t)$ es de soporte compacto sabemos que $F(z)$ tiene que ser analítica en todo $\mathbb{C}$, es decir, que a pesar de z^2 en el denominador de la expresión de $F(z)$ no puede haber singularidad en $z = 0$. De hecho, aplicando l'-Hopital tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} \frac{e^{az} - 2 + e^{-az}}{z^2} &= \lim_{z\to 0} \frac{ae^{az} - ae^{-az}}{2z} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{a^2e^{az} + a^2e^{-az}}{2} \\ &= \frac{2a^2}{2} \\ &= a^2, \end{aligned}$$

existe.

En (5) asumimos que $f(t)$ sea de soporte compacto. Pero el corchete $\langle f(t), e^{-tz}\rangle_t$ existe por supuesto en casos más generales. Supongamos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causal y de orden exponencial para $t \to \infty$, es decir,

$$|f(t)| \leq Ae^{kt} \quad \text{para ciertas constantes } A > 0,\ k \in \mathbb{R} \text{ y para } t \text{ suficientemente grande.} \tag{9}$$

En palabras: para $t \to \infty$ $|f(t)|$ no crece más rápido que exponencialmente. Entonces, si $|f(t)| \leq Ae^{kt}$ para $t \geq t_0$, tenemos con $z = \xi + i\eta$,

$$\int_{t_0}^{\infty} |e^{-tz} f(t)| dt \leq \int_{t_0}^{\infty} Ae^{kt} e^{-t\xi} dt = A \int_{t_0}^{\infty} e^{-t(\xi - k)} dt,$$

que converge para $\xi > k$, lo que implica que $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-tz} f(t)dt$ converge absolutamente en el semiplano $\xi > k$, de modo que $f(t)$ es Laplace transformable. Es decir: todas las $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causales de orden exponencial para $t \to \infty$ son Laplace transformables (una inmensa clase de funciones Laplace transformables). Para todas estas funciones la fórmula (5) sigue válida y también la fórmula (6). Cada función acotada es seguramente de orden exponencial para $t \to \infty$.

Ejemplo 4. *Sea $f(t) = h(t)\cos(at)$, entonces*

$$f'_{gen}(t) = -ah(t)\,\mathrm{sen}(at) + \delta(t)$$

$$\Longrightarrow \quad f''_{gen}(t) = -a^2 h(t)\cos(at) + \delta'(t) \quad \Longrightarrow \quad f''_{gen}(t) = -a^2 f(t) + \delta'(t)$$

$$\xrightarrow[(6),(8)]{\mathcal{L}} \quad z^2 F(z) = -a^2 F(z) + z$$

$$\Longrightarrow \quad F(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}$$

como en la tabla (4). ¡Eso es todo!.

Ejemplo 5. *Sea $f(t) = h(t)t^4$. Tenemos*

$$f'_{gen}(t) = 4h(t)t^3 \quad \Longrightarrow \quad f''_{gen}(t) = 12h(t)t^2 \quad \Longrightarrow \quad f'''_{gen}(t) = 24h(t)t \quad \Longrightarrow \quad f^{(4)}(t) = 24h(t)$$

$$\Longrightarrow \quad f^{(5)}(t) = 24\delta(t) \quad \xrightarrow[(6),(7)]{\mathcal{L}} \quad z^5 F(z) = 24 \quad \Longrightarrow \quad F(z) = \frac{24}{z^5},$$

como también se ve de (4), última linea (con $\lambda = 0$, $n = 4$).

Alternativamente $h(t) \xrightarrow[(4)]{\mathcal{L}} \frac{1}{z}$, *(2)* $\Longrightarrow \quad t^4 h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{d^4}{dz^4}(z^{-1}) = \frac{24}{z^5}.$

Clase 9: Continuación.

Peter Hummelgens

10 de diciembre de 2006

1. Las Reglas Operacionales.

En lo que sigue supongamos que $f, g, \cdots \in \mathcal{D}'_+$ son Laplace transformables.

1. $\mathcal{L}$ es un operador lineal:

$$f(t) + g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z) + G(z), \quad \lambda f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \lambda F(z) \ \ (\Lambda \in \mathbb{C}).$$

Esto es evidente.

2. $$f(t) * g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)G(z)$$

<u>Dem</u>:

$$\begin{aligned} (f*g)(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle (f*g)(t), e^{-tz}\rangle_t = \langle f(u), \langle g(v), e^{-(u+v)z}\rangle\rangle \\ &= \langle f(u), e^{-uz}\langle g(v), e^{-vz}\rangle\rangle \\ &= \langle f(u), e^{-uz}G(z)\rangle \\ &= G(z)\langle f(u), e^{-uz}\rangle \\ &= G(z)F(z) \\ &= F(z)G(z), \ \text{ listo.} \end{aligned}$$

3. $$f_{gen}^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} z^n F(z); \ \ n = 0, 1, 2, \cdots .$$

<u>Dem</u>: $f_{gen}^{(n)}(t) = \delta^{(n)}(t) * f(t) \xrightarrow[2.]{\mathcal{L}} z^n F(z)$ ya que vimos que $\delta^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} z^n$, listo.

4.
$$f(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-az}F(z), \quad a \in \mathbb{R} \ \ \underline{(\text{traslación en } t)}.$$

<u>Dem</u>: $f(t-a) = \delta_a(t) * f(t) \xrightarrow[2.]{\mathcal{L}} e^{-az}F(z)$ ya que $\delta_a(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-az}$.

5.
$$e^{\lambda t}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \ \ \underline{(\text{traslación en } z)}.$$

<u>Dem</u>: $e^{\lambda t}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle e^{\lambda t}f(t), e^{-tz}\rangle_t = \langle f(t), e^{-(z-\lambda t)}\rangle_t = F(z-\lambda)$, listo.

6.
$$t^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n F^{(n)}(z); \quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

<u>Dem</u>:

$$\begin{aligned} t^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle t^n f(t), e^{-tz}\rangle_t &= \langle f(t), t^n e^{-tz}\rangle_t \\ &= \langle f(t), (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}(e^{-tz})\rangle_t \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\langle f(t), e^{-tz}\rangle_t \\ &= (-1)^n F^{(n)}(z), \ \ \text{listo.} \end{aligned}$$

7. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $0 < a \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\langle f(at), \varphi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\varphi(t)dt \overset{s=at}{=} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\varphi\left(\frac{s}{a}\right) ds, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

por lo que definimos para $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\langle f(at), \varphi(t)\rangle := \frac{1}{a}\langle f(t), \varphi\left(\frac{t}{a}\right)\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{1}$$

Luego $f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle f(at), e^{-tz}\rangle \overset{(1)}{=} \frac{1}{a}\langle f(t), e^{-z/a}\rangle = \frac{1}{a}F\left(\frac{z}{a}\right)$, por lo tanto

$$f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a}F\left(\frac{z}{a}\right), \quad a > 0 \ \ (\text{cambio de escala en la variable } t).$$

Observe que para que $f(at)$ sea <u>causal</u> es necesario que $a > 0$.

8. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ de orden exponencial para $t \to \infty$ con $sop(f) \subseteq [c; \infty)$, entonces

$$F(z)e^{cz} \to 0 \ \ \text{si} \ \ Re z \to \infty$$

<u>Dem</u>: ejercicio.

Ejemplo 1. *Sea* $f(t) = h(t)\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}$. *Esta es una función causal y* <u>*acotada*</u> *(por lo tanto de orden exponencial para* $t \to \infty$ *con* $k = 0$ *en (9) de la clase 8)* $\Longrightarrow$ *existe* $F(z) = (\mathcal{L}f(t))(z)$. *Se pide hallar* $F(z)$. *Sea* $g(t) = tf(t) = h(t)\operatorname{sen}(t)$, *entonces* $tf(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z^2+1}$, *pero también* $tf(t) \xrightarrow[6.]{\mathcal{L}} -F'(z)$, *por lo tanto* $F'(z) = -\frac{1}{z^2+1} \Longrightarrow F(z) = -\arctan(z)+c$ *para cierta constante* c. *Pero según 8. tenemos* $F(z) \to 0$ *si* $Rez \to \infty$, *lo que implica que* $c = \arctan(\infty) = \pi/2$

$$F(z) = \frac{\pi}{2} - \arctan(z),$$

es decir, encontramos que

$$h(t)\frac{\operatorname{sen}(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\pi}{2} - \arctan(z). \tag{2}$$

Imagínese Ud el cómputo $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int\limits_0^\infty e^{-tz}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt$, *una integral* <u>*bastante complicada*</u>. *Esta complicación la evitamos por completo por "la magia de las reglas operacionales " (!!).*

Tenemos

$$\begin{aligned} f'_{gen}(t) &= f'_{cl}(t) + \delta(t) \ \ \textit{(tenemos} \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1\textit{)} \\ &= h(t)\frac{t\cos(t) - \operatorname{sen}(t)}{t^2} + \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} zF(z) \\ &= \left(\mathcal{L}\left(h(t)\frac{t\cos(t) - \operatorname{sen}(t)}{t^2}\right)\right)(z) + 1 \end{aligned}$$

entonces con (2)

$$h(t)\frac{t\cos(t) - \operatorname{sen}(t)}{t^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} z\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(z)\right)$$

e imagínese usted tener que calcular

$$\int\limits_0^\infty e^{-tz}\frac{t\cos(t) - \operatorname{sen}(t)}{t^2}dt.$$

2. La TL inversa.

Dada $F(z)$, TL de una $f \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, ¿como hallar $f(t)$?. Este es el <u>problema inverso</u>

$$F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = ?.$$

Por supuesto, cada fórmula $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$ conocida, es en el mismo momento una fórmula $F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$ para la TL inversa. Por ejemplo (ver ejemplo anterior)

$$z\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(z)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t)\frac{t\cos(t) - \operatorname{sen}(t)}{t^2}.$$

Consideremos el caso que $F(z)$ es una función racional, es decir un cociente $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ de polinomios, donde podemos suponer que $P(z)$, $Q(z)$ no tienen ceros comunes.

Ejemplo 2. *(a) Sea* $F(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z^2+1)}$. *Aplicando fracciones parciales ponemos*

$$\frac{1}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz+C}{z^2+1} \quad \Longrightarrow \quad 1 = A(z^2+1) + (Bz+C)(z+1)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$

$$z = -1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 2A \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 1 = \frac{1}{2}(z^2+1) + (Bz+C)(z+1),$$

luego

$$z = 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 = \frac{1}{2} + C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 1 = \frac{1}{2}(z^2+1) + \left(Bz + \frac{1}{2}\right)(z+1),$$

luego

$$z = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 1 + \left(B + \frac{1}{2}\right) 2 \quad \Longrightarrow \quad B = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad F(z) \quad &= \quad \frac{1/2}{z+1} + \frac{-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}}{z^2+1} \\
&= \quad \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1} \\
&\xrightarrow[\textit{tabla}]{\mathcal{L}^{-1}} \quad f(t) = \frac{1}{2}h(t)e^{-t} - \frac{1}{2}h(t)\cos(t) + \frac{1}{2}h(t)\,\mathrm{sen}(t)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2}h(t)\left[e^{-t} - \cos(t) + \mathrm{sen}(t)\right].$$

(b) Se pide hallar $g(t) = h(t)e^{-t} * h(t)\,\mathrm{sen}(t)$. *Tenemos*

$$g(t) \xrightarrow[2.]{\mathcal{L}^{-1}} G(z) = \frac{1}{z+1}\frac{1}{z^2+1}$$

ya que

$$h(t)e^{-t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z+1}, \quad h(t)\,\mathrm{sen}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z^2+1}$$

según la tabla. Luego

$$G(z) = \frac{1}{z+1}\frac{1}{z^2+1} \xrightarrow[(a)]{\mathcal{L}^{-1}} g(t) = \frac{1}{2}h(t)\left(e^{-t} - \cos(t) + \mathrm{sen}(t)\right).$$

Vemos aquí la aplicación de la TL al computo de productos de convolución. La idea general es el esquema

$$f(t) = g(t) * k(t) \xrightarrow[2.]{\mathcal{L}} F(z) = G(z)K(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t).$$

Ejemplo 3. *(a) Se pide hallar una s.f. causal $E(x)$ del ODLCC $L = d^2/dx^2 + k^2$ $(k > 0)$.*

Tenemos

$$E''_{gen}(x) + k^2 E(x) = \delta(x) \xrightarrow[3.]{\mathcal{L}} z^2 + \Xi(z) + k^2\Xi(z) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad (z^2 + k^2)\Xi(z) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \Xi(z) = \frac{1}{z2 + k^2} = \frac{1}{k}\frac{k}{z^2 + k^2}$$

$$\xrightarrow[tabla]{\mathcal{L}^{-1}} E(x) = \frac{1}{k}h(x)\operatorname{sen}(kx),$$

la s.f. ya encontrada antes. Vemos aquí: la TL es un instrumento eficiente para encontrar s.f. causales de ODLCC. La idea general es el esquema siguiente. Si

$$L = a_0 + a_1\frac{d}{dx} + \cdots + a_n\frac{d^n}{dx^n},$$

entonces

$$LE(x) = \delta(x) \quad \Longrightarrow \quad a_0E(x) + a_1E'_{gen}(x) + \cdots + a_nE^{(n)}_{gen}(x) = \delta(x)$$

$$\xrightarrow[3.]{\mathcal{L}} a_0\Xi(z) + a_1z\Xi(z) + \cdots + a_nz^n\Xi(z) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \Xi(z) = \frac{1}{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} E(x).$$

(b) Se pide resolver la ED

$$-u''(x) + u(x) = h(x), \quad -\infty < x < \infty$$

que ya resolvimos en la Clase 7. Tenemos, asumiendo la existencia de una solución $u(x)$ Laplace transformable,

$$-u''(x) + u(x) = h(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-z^2 + 1)U(z) = \frac{1}{z}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad U(z) \quad &= \quad \frac{1}{z(1-z^2)} = -\frac{1}{z(z+1)(z-1)} = \text{(fracciones parciales)} \\ &= \quad \frac{1}{z} - \frac{1/2}{z+1} - \frac{1/2}{z-1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(x) - \frac{1}{2}h(x)\left[e^{-x} + e^{x}\right] = h(x)(1 - \cosh(x)).\end{aligned}$$

Pero lo anterior es basado en la suposición de que existe una solución Laplace transformable, y por eso es en principio necesario verificar que $h(x)(1 - \cosh(x))$ realmente es solución de la ED. Esto lo dejamos al lector. Observe que esta solución particular de la ED ya encontramos en la Clase 7. La solución general de la ED es

$$u(x) = h(x)(1 - \cosh(x)) + Ae^x + Be^{-x} \quad (A, B \in \mathbb{C} \text{ arbitrarios}).$$

Vemos entonces: La TL puede servir para encontrar soluciones particulares Laplace transformables de una ED con coeficiente constantes.

(c) Sea la ED

$$-u''(x) + u(x) = h(x)e^{x^2}; \ \ -\infty < x < \infty.$$

No podemos aplicar la TL ya que $h(x)e^{x^2}$ no es Laplace transformable. Lo que sí podemos hacer es utilizar la s.f $E_1(x) = -h(x)\,\mathrm{senh}(x)$ de $L = -d^2/dx^2 + 1$ (Ver Clase 7) y encontrar la solución particular $u_p(x) = -h(x)\,\mathrm{senh}(x) * h(x)e^{x^2}$. La s.f $E_1(x)$ sí podemos encontrar con la TL:

$$-E''_{gen}(x) + E(x) = \delta(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-z^2+1)\Xi(z) = 1$$

$$\Longrightarrow \ \ \Xi(z) = -\frac{1}{z^2-1} \xrightarrow[tabla]{\mathcal{L}} E(x) = -h(x)\,\mathrm{senh}(x).$$

Una manera alternativa para hallar la TL inversa de $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ es el método de los residuos. Si $grado(P) \geq grado(Q)$, el primer paso es hacer la división

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = R(z) + \frac{\widetilde{P}(z)}{\widetilde{Q}(z)}$$

donde $R(z)$ es un polinomio y $grado(\widetilde{P}) < grado(\widetilde{Q})$. Supongamos entonces que

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \ \text{ con } grado(P) < grado(Q).$$

Los ceros $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ de $Q(z)$ (cada uno con su multiplicidad correspondiente) son los polos de $F(z)$. Tenemos entonces

$$F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = h(t)\sum_{n=1}^{N} Res_{\alpha_n}\left(e^{tz}F(z)\right) \tag{3}$$

donde $Res_{\alpha_i}(e^{tz}F(z))$ es el residuo de $e^{tz}F(z)$ en $z = \alpha_i$.

Ejemplo 4. *(a) Sea $F(z) = \dfrac{z^4+2z}{z^2+1}$. Tenemos haciendo la división*

$$F(z) = z^2 - 1 + \frac{2z+1}{z^2+1} = z^2 - 1 + G(z), \ \ G(z) = \frac{2z+1}{z^2+1}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \delta''(t) - \delta(t) + g(t). \tag{4}$$

Además

$$G(z) = \frac{2z+1}{z^2+1}$$

tiene polos en $z = \pm i$ *y*

$$\begin{aligned}
Res_i\left(e^{tz}G(z)\right) &= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{2z+1}{z^2+1}e^{tz} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{2z+1}{(z-i)(z+i)}e^{tz} \\
&= \lim_{z\to i}\frac{2z+1}{z+i}e^{tz} \\
&= \frac{2i+1}{2i}e^{it}.
\end{aligned}$$

Similarmente

$$Res_{-i}\left(e^{tz}G(z)\right) = \frac{2i-1}{2i}e^{-it}$$

$$\begin{aligned}
\stackrel{(3)}{\Longrightarrow} \quad g(t) &= h(t)\left[\frac{2i+1}{2i}e^{it} + \frac{2i-1}{2i}e^{-it}\right] \\
&= h(t)\left[e^{it} - e^{-it}\right] + \frac{1}{2i}\left[e^{it} - e^{-it}\right] \\
&= \textit{(fórmula de Euler)} \\
&= 2h(t)\cos(t) + h(t)\operatorname{sen}(t),
\end{aligned}$$

y ahora con (4)

$$f(t) = \delta''(t) - \delta(t) + h(t)[2\cos(t) + \operatorname{sen}(t)].$$

En este caso el método de los residuos <u>no</u> es la manera más rápida para hallar $g(t)$*. Más corto*

$$G(z) = 2\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{z^2+1} \xrightarrow[\textit{tabla}]{\mathcal{L}} g(t) = 2h(t)\cos(t) + h(t)\operatorname{sen}(t).$$

(b) *Sea* $K(z) = e^{3z}\frac{z^4+2z}{z^2+1}$*. Ahora* $K(z)$ *<u>no es</u> una función racional por la presencia del factor* e^{3z}*. Pero este factor podemos acomodar con la regla operacional 4.. Tenemos*

$$K(z) = e^{3z}F(z)$$

con la $F(z)$ *de (a), es decir,*

$$F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \delta''(t) - \delta(t) + h(t)(2cos(t) + \operatorname{sen}(t)).$$

Entonces con (4) tenemos

$$K(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t+3) = \delta''(t+3) - \delta(t+3) + h(t+3)[2\cos(t+3) + \operatorname{sen}(t+3)]$$

$$\Longrightarrow \quad k(t) = \delta''_{-3}(t) - \delta_{-3}(t) + h(t+3)[2\cos(t+3) + \operatorname{sen}(t+3)].$$

Ejemplo 5. *Sea* $F(z) = \dfrac{2z^2\cosh(z)}{4+z^2}$ *(no es una función racional). Tenemos*

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{2z^2}{4+z^2}\left(e^z + e^{-z}\right) = \left(1 - \frac{4}{z^2+4}\right)\left(e^z + e^{-z}\right) \\
&= e^z + e^{-z} - 4e^z\frac{1}{z^2+4} - 4e^{-z}\frac{1}{z^2+4} \\
&\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \delta_{-1}(t) + \delta_1(t) - 2h(t+1)\operatorname{sen}[2(t+1)] - 2h(t-1)\operatorname{sen}[2(t-1)]
\end{aligned}$$

usando 4. y la tabla.

Clase 10: Continuación.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

1. Aplicaciones de la TL

Ya ilustramos (en la clase 9) 3 aplicaciones de la TL: cómputo de productos de convolución, cómputo de $s.f.$ causales de ODLCC, cómputo de una solución causal y Laplace transformable de una ED con coeficientes constantes.

Veamos más aplicaciones mediante ejemplos concretos.

Ejemplo 1. *(a) Sea la EC*

$$h(x)x^2 * u(x) = h(x)\,\mathrm{sen}(2x), \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

que ya resolvimos en $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ en la clase 7. Buscamos una solución causal y Laplace transformable $u(x)$.

<u>Asumiendo</u> la existencia de una solución causal y Laplace transformable $u(x)$ de (1), tenemos

$$h(x)x^2 * u(x) = h(x)\,\mathrm{sen}(2x) \xrightarrow[2.]{\mathcal{L}} F(z)U(z) = G(z) \tag{2}$$

donde

$$h(x)x^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z), \quad u(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(z), \quad h(x)\,\mathrm{sen}(2x) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(z).$$

Para hallar $F(z)$ tenemos $f(x) = h(x)x^2 \Longrightarrow f'_{gen}(x) = 2h(x)x \Longrightarrow f''_{gen}(x) = 2h(x) \Longrightarrow f'''_{gen}(x) = 2\delta(x) \xrightarrow[3.]{\mathcal{L}} z^3F(z) = 2 \Longrightarrow F(z) = \dfrac{2}{z^3}$. De la tabla tenemos $G(z) = \dfrac{2}{z^2+4}$, luego con (2),

$$U(z) = \frac{z^3}{z^2+4} = z - \frac{4z}{z^2+4} \xrightarrow[tabla]{\mathcal{L}^{-1}} u(x) = \delta'(x) - 4h(x)\cos(2x)$$

como solución particular causal y Laplace transformada de (1) (sustitución en (1) revela que realmente es solución).

(b) *Sea la EC*

$$h(x)x^2 * u(x) = g(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{3}$$

con $g \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. *Como* <u>*no sabemos*</u> *si* g *es Laplace transformable,* <u>*no podemos*</u> *aplicar la TL a (3). Pero podemos usar la TL para hallar una s.f. causal y Laplace transformable de* $h(x)x^2*$. *Tenemos*

$$h(x)x^2 * E(x) = \delta(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{z^3}\Xi(z) = 1 \implies \Xi(z) = \frac{1}{2}z^3 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} E(x) = \frac{1}{2}\delta'''(x),$$

luego $u(x) = E(x) * g(x) = \frac{1}{2}\delta'''(x) * g(x) = \frac{1}{2}g'''_{gen}(x)$ *es solución causal de (3). Aplicando este resultado con* $g(x) = h(x)\operatorname{sen}(2x)$ *como en (a), obtenemos*

$$u(x) = \frac{1}{2}(h(x)\operatorname{sen}(2x))'''_{gen} = -4h(x)\cos(2x) + \delta'(x)$$

como en (a) (es el mismo cómputo como en la página 7.5 de la Clase 7)

Ejemplo 2. *Sea el PVI*

$$\begin{cases} u''(t) + 4u(t) = e^{-2t}; & -\infty < t < \infty \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \end{cases}$$

Como en la Clase 7 reemplazamos el PVI por una sola ED en sentido distribucional. Ponemos $v(t) = h(t)u(t)$ *donde* $u(t)$ *es* <u>*la*</u> *solución buscada. Tenemos*

$$v'_{gen}(t) = h(t)u'(t) + u(0)\delta(t) = h(t)u'(t),$$

luego

$$\begin{aligned} v''_{gen}(t) &= h(t)u''(t) + u'(0)\delta(t) = h(t)u''(t) + \delta(t) \\ \implies\quad v''_{gen}(t) + 4v(t) &= h(t)[u''(t) + 4u(t)] + \delta(t) \\ \overset{ED}{\implies}\quad v''_{gen}(t) + 4v(t) &= h(t)e^{-2t} + \delta(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora, aplicando directamente la TL a (4), tenemos (tabla: $h(t)e^{\lambda t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z-\lambda}$*)*

$$(4) \xrightarrow{\mathcal{L}} (z^2+4)V(z) = \frac{1}{z+2} + 1 = \frac{z+3}{z+2}$$

$$\Rightarrow V(z) = \frac{z+3}{(z+2)(z^2+4)}. \tag{5}$$

Aplicando fracciones parciales,

$$V(z) = \frac{1/8}{z+2} + \frac{-\frac{1}{8}z + 5/4}{z^2+4} = \frac{1}{8}\frac{1}{z+2} - \frac{1}{8}\frac{z}{z^2+4} + \frac{5}{8}\frac{2}{z^2+4}$$

$$\xrightarrow[tabla]{\mathcal{L}^{-1}} v(t) = \frac{1}{8}h(t)\left[e^{-2t} - \cos(2t) + 5\,\mathrm{sen}(2t)\right], \quad v(t) = h(t)u(t)$$

y la solución del PVI es

$$u(t) = \frac{1}{8}\left[e^{-2t} + 5\,\mathrm{sen}(2t) - \cos(2t)\right]; \quad -\infty < t < \infty$$

Alternativamente podemos aplicar a (2) el método de los residuos. Los polos de $V(z)$ son $z = -2, \pm 2i$, y encontramos (¡verifique!).

$$\begin{aligned} v(t) &= h(t)\left[\frac{1}{8}e^{-2t} - \frac{1}{16}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) - \frac{5i}{16}\left(e^{2it} - e^{-2it}\right)\right] = (\textit{fórmulas de Euler}) \\ &= \frac{1}{8}h(t)\left[e^{-2t} - \cos(2t) + 5\,\mathrm{sen}(2t)\right] \end{aligned}$$

como antes.

Ejemplo 3. *Sea $E(t) = \frac{1}{2}h(t)t^2e^t$. Se pide hallar un ODLCC L que tenga $E(t)$ como s.f.. Aplicamos la TL. Tenemos*

$$LE = \delta \Longrightarrow (L\delta) * E = \delta \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(L\delta)(z)\Xi(z) = 1.$$

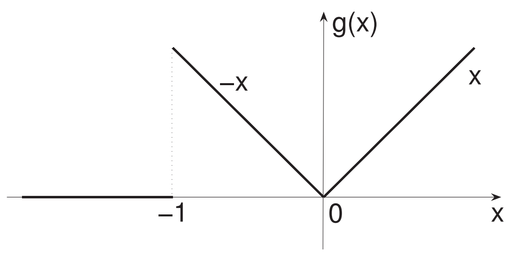
Pero también

$$\frac{1}{2}h(t)t^2e^t \xrightarrow[tabla]{\mathcal{L}} \Xi(z) = \frac{1}{(z-1)^3}$$

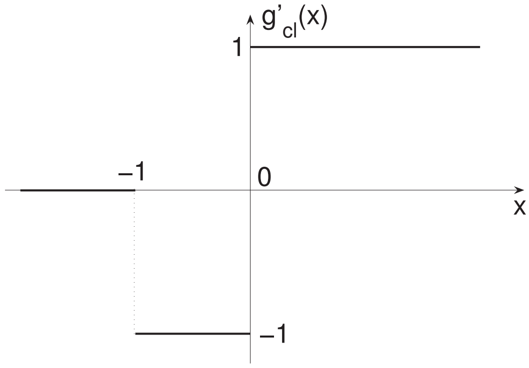
$$\begin{aligned} \Longrightarrow \mathcal{L}(L\delta)(z) &= (z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \\ \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} (L\delta)(t) &= \delta'''(t) - 3\delta''(t) + 3\delta'(t) - \delta(t) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad L = \frac{d^3}{dt^3} - 3\frac{d^3}{dt^3} + 3\frac{d}{dt} - 1.$$

Ejemplo 4. *Se pide hallar $f(x) = h(x+1)|x| * h(x)x$. Sea $g(x) = h(x+1)|x|$.*



$$g'_{gen}(x) = g'_{cl}(x) + \delta_{-1}(x)$$



$$g''_{gen}(x) = g''_{cl}(x) - \delta_{-1}(x) + 2\delta(x) + \delta'_{-1}(x)$$

$$g''_{gen}(x) = -\delta_{-1}(x) + 2\delta(x) + \delta'_{-1}(x)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} z^2 G(z) = -e^z + 2 + ze^z \implies G(z) = \frac{2 + (z-1)e^z}{z^2} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) * h(x)x \underset{(6),tabla}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} F(z) = \frac{2 + (z-1)e^z}{z^2}\frac{1}{z^2} \\ &= \frac{2 + ze^z - e^z}{z^4} = \frac{2}{z^4} + \frac{e^z}{z^3} - \frac{e^z}{z^4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \\ f(x) &= \frac{1}{3}h(x)x^3 + \frac{1}{2}h(x+1)(x+1)^2 - \frac{1}{6}h(x+1)(x+1)^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 5. *Sea L una ODLCC cuyo s.f. causal es*

$$E(t) = h(t)(1 - e^{-t}) \tag{7}$$

Se pide hallar una solución causal de la ED

$$Lu(t) = h(t)t; \quad -\infty < t < \infty \tag{8}$$

Como $E(t)$ y $h(t)t$ son ambas causales, existe $E(t) * h(t)t$ y sabemos que

$$u(t) = E(t) * h(t)t \text{ es una solución de (8)} \tag{9}$$

Para hallar este producto de convolución aplicamos las reglas operacionales de la convolución:

$$\text{(9)} \implies u'_{gen}(t) = E(t) * h(t) \implies u''_{gen}(t) = E(t) * \delta(t)$$
$$\implies u''_{gen}(t) = E(t). \tag{10}$$

Suponiendo que $u(t)$ es Laplace transformable, tenemos

$$\text{(10)} \xrightarrow{\mathcal{L}} z^2 U(z) = \Xi(z) \;\; con \;\; E(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Xi(z). \tag{11}$$

Pero

$$E(t) = h(t) - h(t)e^{-t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(z+1)}$$

entonces (11) da

$$z^2 U(z) = \frac{1}{z(z+1)} \implies U(z) = \frac{1}{z^3(z+1)}$$

$$\begin{aligned} \implies U(z) &= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \\ \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t) &= \frac{1}{2}h(t)t^2 - h(t)t + h(t) - h(t)e^{-t} \\ \implies u(t) &= h(t)\left(\frac{1}{2}t^2 - t + 1 - e^{-t}\right), \end{aligned}$$

que es causal.

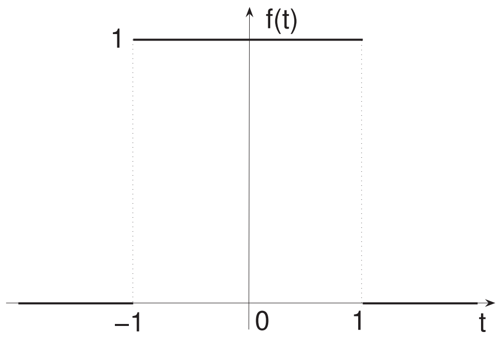
Dejamos al lector verificar que $L = \dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{d}{dt}$ y que $u(t)$ es solución de (8).

Ejemplo 6. *Buscamos una solución causal de*

$$h(t)\,\mathrm{sen}(2t) * u(t) = f(t) \quad -\infty < t < \infty$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 1; & -1 < t < 1 \\ 0; & \textit{otro } t \end{cases}$$



Manera 1. *Hallemos primero la s.f. causal de* $h(t)\operatorname{sen}(2t)*$. *Tenemos*

$$\begin{aligned} h(t)\operatorname{sen}(2t) * E(t) &= \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{z^2+4}\Xi(z) = 1 \\ \implies \Xi(z) &= \frac{1}{2}z^2 + 2 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} E(t) = \frac{1}{2}\delta''(t) + 2\delta(t), \end{aligned}$$

luego

$$u(t) = \left[\frac{1}{2}\delta''(t) + 2\delta(t)\right] * f(t) = \frac{1}{2}f''_{gen}(t) + 2f(t). \tag{12}$$

Pero $f'_{gen}(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_1(t) \implies f''_{gen}(t) = \delta'_{-1}(t) - \delta'_1(t)$, *luego con (12)*

$$u(t) = \frac{1}{2}\delta'_{-1}(t) - \frac{1}{2}\delta'_1(t) + 2f(t),$$

listo.

Manera 2. *Aplicando directamente la TL a la EC resulta*

$$\frac{2}{z^2+4}U(z) = F(z). \tag{13}$$

Pero $f'_{gen}(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} zF(z) = e^z - e^{-z} \implies F(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{z}$ *luego con (13)*

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{z^2+4}{2}\frac{e^z-e^{-z}}{z} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)\left(e^z - e^{-z}\right) \\ &= \frac{1}{2}ze^z - \frac{1}{2}ze^{-z} + \frac{2}{z}e^z - \frac{2}{z}e^{-z} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2}\delta'_{-1}(t) - \frac{1}{2}\delta'_1(t) + 2h(t+1) - 2h(t-1) \\ &= \frac{1}{2}\delta'_{-1}(t) - \frac{1}{2}\delta'_1(t) + 2f(t). \end{aligned}$$

Ejemplo 7. *Sea la ED lineal con coeficientes* <u>*variables*</u>

$$(1-t)u''(t) + tu'(t) - u(t) = 0; \quad -\infty < t < \infty \tag{14}$$

Si existe solución causal y Laplace transformable $u(t)$, *la podemos encontrar mediante la TL. Tenemos la regla operacional* $t^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n F^{(n)}(z)$, *de modo que*

$$-tu''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (z^2U(z))', \quad tu'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -(zU(z))',$$

es decir,

$$-tu''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 2zU(z) + z^2U'(z), \quad tu'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -U(z) - zU'(z)$$

y

$$\textit{(14)} \xrightarrow{\mathcal{L}} (z^2-z)U'(z) + (z^2+2z-2)U(z) = 0$$

$$\implies U'(z) = -\frac{z^2+2z-2}{z(z-1)}U(z) \implies \frac{dU}{U} = -1 - \frac{2}{z} - \frac{1}{z-1}$$

$$\implies U(z) = A\frac{e^{-z}}{z^2(z-1)}, \quad A \in \mathbb{C} \ \textit{arbitraria}$$

$$\implies U(z) = Ae^{-z}\left(\frac{-1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t) = Ah(t-1)(e^{t-1}-t). \tag{15}$$

Sustitución de (15) en (14) muestra que $A(e^{t-1}-t)$ *es solución de (14). La solución general clásica de (14) es* $Be^t + ct$ *(*$B, C \in \mathbb{C}$ *arbitraria). La TL nos ha producido una solución particular de (14)*